Méthode d'Euler en classe de 1ère S

Extrait du programme de **Première S** (B.O. HORS-SÉRIE n°7 du 31 août 2000) :

ANALYSE

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Dérivation Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable; approximation affine associée de la fonction.		La notion de développement limité à l'ordre 1 n'est pas au programme. On pourra cependant évoquer le caractère optimal de l'approximation affine liée à la dérivée.
	On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation : $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$	On pourra observer sur grapheur ou tableur l'erreur commise dans le cas où on connaît une expression de la fonction y.

✎ cours de Première :

Etant donnée une courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction dérivable en un point a et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a\,;f(a))$: « pour tout h proche de zéro, $f(a) + h\times f'(a)$ est la meilleure des approximations affines de $f(a + h)$ ("approximation affine locale") », autrement dit, $f(a + h) \approx f(a) + h\times f'(a)$, soit encore : $f(a + h) - f(a) \approx h\times f'(a)$, c'est à dire aussi : $\Delta f \approx \Delta x\times f'(a)$ ou $\Delta f \approx \Delta t\times f'(a)$ selon la variable choisie…

Le principe de la méthode d'Euler

On cherche la solution inconnue $y \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle $y' = f(t)$ satisfaisant à la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Or, localement, si t augmente d'une "petite" valeur, la courbe solution $\mathcal{C}$, représentative de la fonction y, peut être approchée par sa tangente (cf. rappel de cours ci-dessus).

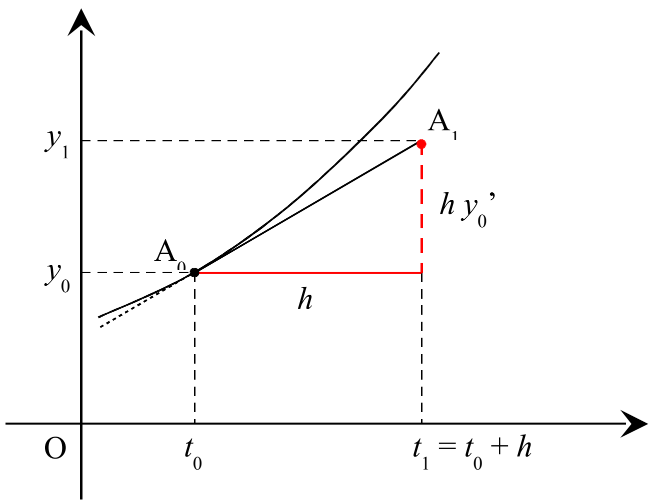
Autrement dit, en $t_1 = t_0 + h$, pour "h proche de zéro" on peut considérer le point de la tangente comme une bonne approximation du point inconnu de la courbe $\mathcal{C}$.

Considérons donc le point A_0 (t_0 ; y_0) et plaçons-nous sur la tangente en A_0 à la courbe $\mathcal{C}$ pour passer du point A_0 au point A_1 d'abscisse $t_0 + h$. Cette tangente ayant pour coefficient directeur $y_0' = f(t_0)$, on a donc : A_1 ($t_0 + h$; $y_0 + h\,y_0'$).

Une approximation de $\mathcal{C}$ entre t_0 et $t_0 + h$ est donc le segment [A_0 ; A_1].

On réitère ensuite le procédé à partir du point A_1 qui joue alors le rôle du point A_0, etc.[1]

On obtient ainsi une ligne brisée qui est une approximation de la courbe solution du problème ("*courbe intégrale*"). La fonction y cherchée se trouve ainsi approximée par une fonction affine par morceaux.



[1] on approche donc la courbe solution $\mathcal{C}$ par des segments **parallèles** à des tangentes à $\mathcal{C}$.

Exemple[2]

> Déterminer une fonction y dérivable sur [1 ; 5] telle que :
> $y(1)=\dfrac{2}{3}$ et pour tout réel t de [1 ; 5], $y'(t)=\sqrt{t}=f(t)$.

Construction d'une solution approchée de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction y cherchée :

Première approximation ("grossière") en partageant l'intervalle [1 ; 5] en 4 intervalles d'amplitude $h = 1$ (↳ notion de "***pas***" pour la calculatrice ou un tableur…)

On note $t_0=1$, $t_1=2$, $t_2=3$, $t_3=4$ et $t_4=5$. En utilisant la méthode d'Euler on va chercher des valeurs approchées de : $y_1=y(t_1)$, $y_2=y(t_2)$, $y_3=y(t_3)$ et $y_4=y(t_4)$.

(↳ notation indicée ↳ notion de suite, suite arithmétique, etc.)

Soit A_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $t_0=1$; on a donc $y_0=y(t_0)=y(1)=\dfrac{2}{3}$, c'est à dire $A_0\left(1\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Pour "h proche de zéro", on a : $y(t_0+h)\approx y(t_0)+h\times y'(t_0)$. Si nous nous contentons, dans un premier temps, de cette approximation pour $h = 1$, qui n'est pas à proprement parler "proche de zéro", on obtient : $y(t_0+1)\approx\dfrac{2}{3}+y'(t_0)$ soit encore : $y(t_1)\approx\dfrac{2}{3}+\sqrt{t_0}$, c'est à dire $y_1\approx\dfrac{2}{3}+\sqrt{1}$ et donc $A_1\left(2\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

On réitère ce raisonnement en y_1 où l'on a : $y(t_1+1)\approx y(t_1)+1\times y'(t_1)$ c'est à dire : $y_2\approx y_1+\sqrt{t_1}$ soit encore : $y_2\approx\dfrac{5}{3}+\sqrt{2}\approx 3{,}08$, etc. en prenant $y_{k+1}=y(t_{k+1})\approx y_k+\sqrt{t_k}$ pour k entier allant de 0 à 3, ce qui peut déjà s'obtenir avec un tableur, style EXCEL (1S TD méthode d'Euler : feuille "**pas h = 1 et h = 0,25**") ou avec le tableur d'une calculatrice comme indiqué ci-dessous :

	A	B	Formules colonne B
1	pas : $h = 1$		
2	t	$\approx y(t)$	
3	1	0,66666667	=2/3
4	2	1,66666667	=B3+RACINE(A3) à recopier vers le bas
5	3	3,08088023	=B4+RACINE(A4)
6	4	4,81293104	=B5+RACINE(A5)
7	5	6,81293104	=B6+RACINE(A6)

↳ possibilité pour la colonne A : dans le menu **Edition**, sélectionner **Recopier** puis **Série**…

Avec une calculatrice :

Rentrer les conditions initiales ainsi que le pas h : t_0→A ; y_0→B ; h→H ; limite supérieure de t→L.

Puis écrire un programme qui correspond à l'algorithme suivant :

```
X←A
Y←B
Afficher X et Y
Y←Y+H*f(X)
X←X+H
```

Deuxième approximation : en partageant l'intervalle [1 ; 5] en 16 intervalles d'amplitude $h = 0{,}25$ (↳ nouveau ***pas*** $h = 0{,}25$).

On note $t_0=1$, $t_1=1{,}25$, $t_2=1{,}5$, $\cdots$, $t_{15}=4{,}75$ et $t_{16}=5$. On va donc cette fois chercher des valeurs approchées de : $y_1=y(t_1)$, $y_2=y(t_2)$, $\cdots$, $y_{15}=y(t_{15})$ et $y_{16}=y(t_{16})$.

[2] inspiré du TD 2 page 73 du Transmath 1èreS

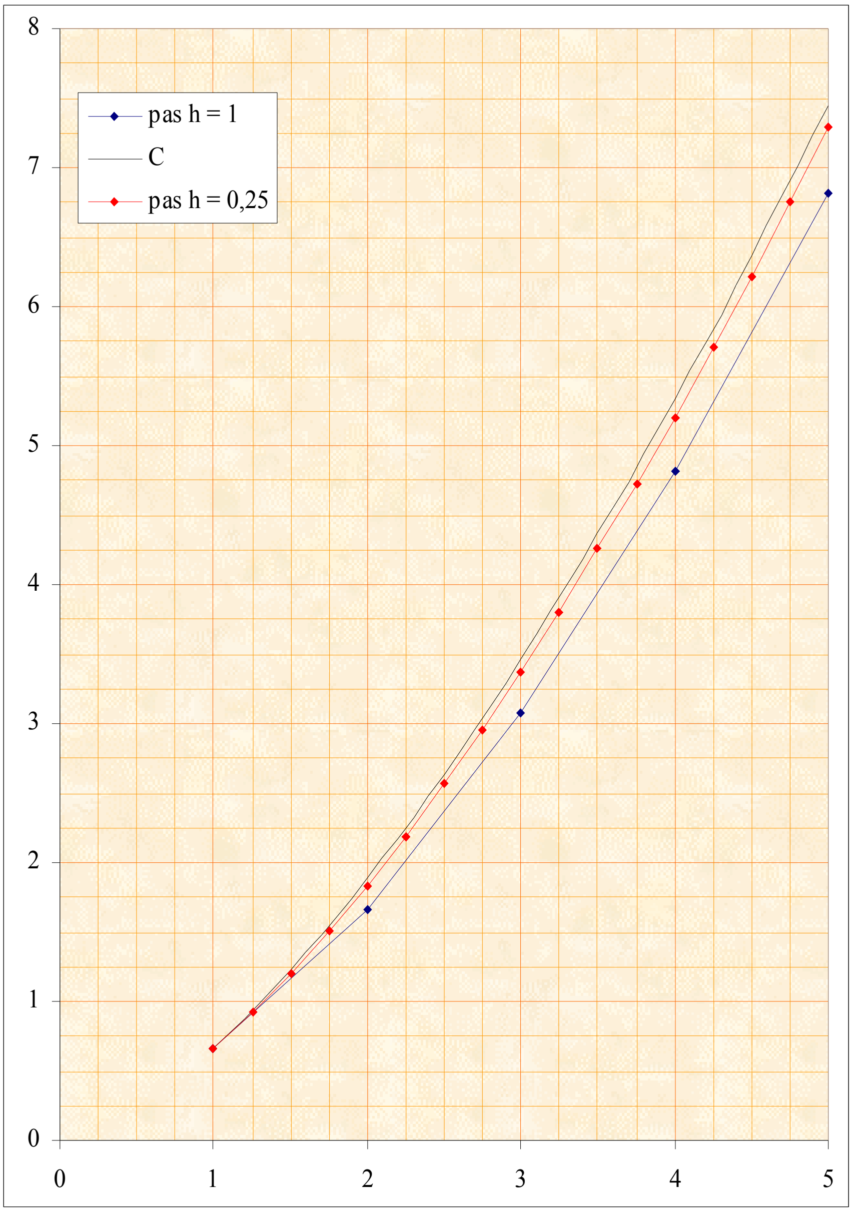
Méthode d'Euler en classe de 1ère S

Pour "h proche de zéro", de $y(t_0+h)\approx y(t_0)+h\times y'(t_0)$ on déduit : $y(t_0+0,25)\approx \frac{2}{3}+0,25\times y'(t_0)$ soit encore : $y_1=y(t_1)\approx \frac{2}{3}+0,25\sqrt{1}$ c'est à dire $y_1\approx\frac{11}{12}$.

On réitère ce raisonnement en prenant $y_{k+1}=y(t_{k+1})\approx y_k+0,25\sqrt{t_k}$ pour k entier allant de 0 à 15, ce qui peut s'obtenir avec un tableur comme pour le cas précédent…

	A	B		
9	pas : $h = 0,25$			
10	t	$\approx y(t)$	Formules	
11	1	0,66666667	=2/3	
12	1,25	0,91666667	=B11+0,25*RACINE(A11)	*à recopier vers le bas*
13	1,5	1,19617516	=B12+0,25*RACINE(A12)	
26	4,75	6,75275148	=B25+0,25*RACINE(A25)	
27	5	7,29761385	=B26+0,25*RACINE(A26)	

pas : $h = 0,25$		Solution théorique*
t	$\approx y(t)$	$\frac{2}{3}t\sqrt{t}$
1	0,66666667	0,66666667
1,25	0,91666667	0,93169499
1,5	1,19617516	1,22474487
1,75	1,50236138	1,54335493
2	1,8330803	1,88561808
2,25	2,18663369	2,25
2,5	2,56163369	2,63523138
2,75	2,95691839	3,04023939
3	3,37149649	3,46410162
3,25	3,80450919	3,90601388
3,5	4,2552031	4,36526695
3,75	4,72291028	4,84122918
4	5,2070332	5,33333333
4,25	5,7070332	5,8410663
4,5	6,2224214	6,36396103
4,75	6,75275148	6,90158999
5	7,29761385	7,45355992

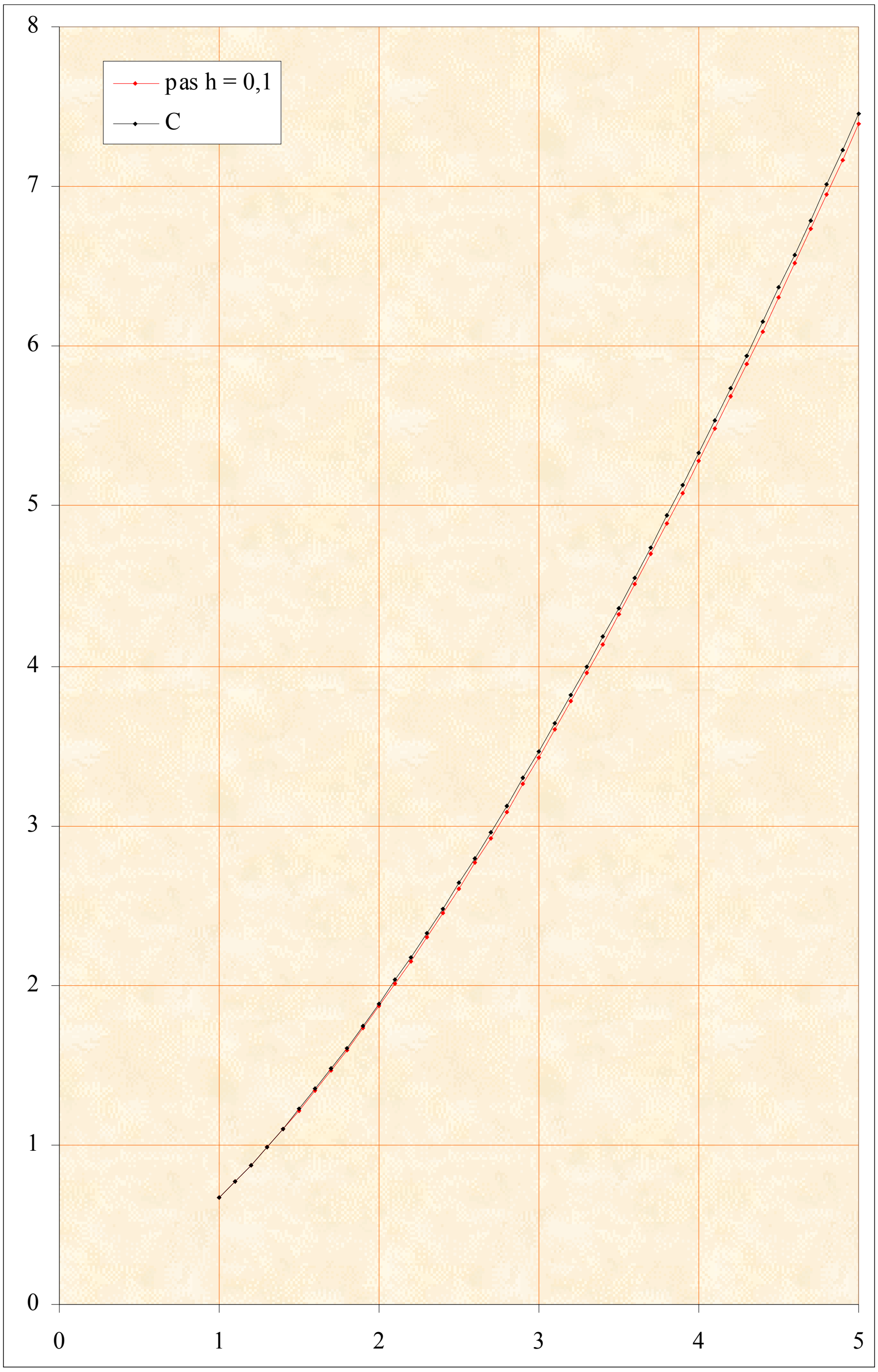


* **Remarque :** lors d'un précédent devoir, les élèves ont eu à étudier la fonction $x\mapsto x\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$ et ont eu, notamment, à dériver cette fonction… À ce stade, conjecturer la solution théorique n'a donc pas posé un grand problème…

Méthode d’Euler en classe de 1ère S

(1S TD méthode d'Euler : feuille “**pas h = 0,1**”)

pas : $h = 0,25$		Solution théorique*
t	$\approx y(t)$	$\frac{2}{3}t\sqrt{t}$
1	0,666666667	0,666666667
1,1	0,766666667	0,769126489
1,2	0,871547551	0,876356092
1,3	0,981092063	0,988152035
1,4	1,095109605	1,104334893
1,5	1,213431201	1,224744871
1,6	1,335905688	1,349238468
1,7	1,462396795	1,477685879
1,8	1,592780843	1,609968944
1,9	1,726944921	1,745979509
2	1,864785409	1,885618083
2,1	2,006206765	2,028792744
2,2	2,151120533	2,175418223
2,3	2,299444502	2,325415136
2,4	2,451102011	2,478709342
2,5	2,606021345	2,635231383
2,6	2,764135228	2,794916019
2,7	2,925380383	2,957701811
2,8	3,08969715	3,123530766
2,9	3,257029156	3,292348031
3	3,427323019	3,464101615
3,1	3,6005281	3,638742151
3,2	3,776596269	3,816222682
3,3	3,955481707	3,996498467
3,4	4,137140728	4,179526821
3,5	4,321531617	4,365266951
3,6	4,508614487	4,553679831
3,7	4,698351146	4,744728069
3,8	4,890704987	4,938375801
3,9	5,085640874	5,134588591
4	5,28312505	5,333333333
4,1	5,48312505	5,534578173
4,2	5,685609618	5,738292429
4,3	5,890548633	5,944446521
4,4	6,097913047	6,153011909
4,5	6,307674816	6,363961031
4,6	6,519806851	6,577267247
4,7	6,734282956	6,792904795
4,8	6,95107779	7,010848736
4,9	7,170166813	7,231074916
5	7,391526249	7,453559925



Dans la pratique, si on veut obtenir une solution approchée par la méthode d’Euler sur un intervalle, on retiendra donc que :

- plus la valeur du pas h diminue plus la précision augmente,
- l’erreur commise est proportionnelle à h.