Chapitre 1

Arithmétique

Partie 6 : *Nombres premiers entre eux*

Définition 1 : *Nombres premiers entre eux*
On se donne deux entiers relatifs a et b non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a\,;b)=1$

Remarque **:**
- Deux nombres sont donc premiers entre eux s'ils n'ont d'autres diviseurs communs que 1 et -1.
- On dit aussi que a est premier avec b, ou que b est premier avec a.
- On dit aussi parfois que a et b sont étrangers.

Définition 2 : *Nombres premier*
On dit qu'un nombre entier naturel $p \geq 2$ est premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Remarque **:**
Les nombres premiers feront l'objet d'une étude plus approfondie dans une partie dédiée ultérieure.

Propriété 1 : (*Démonstration exigible*)
Si p et a sont deux entiers naturels non nuls et si p est un nombre premier qui ne divise pas a alors $PGCD(a\,;p)=1$.
Autrement dit : « *Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas* »

Démonstration
Comme p est un nombre premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p et comme p ne divise pas a, p n'est pas diviseur commun à p et a. Le seul diviseur commun positif à p et a est donc 1, d'où le résultat.

Propriété 2 : *Théorème de Bezout* (*Admis*)
Si a et b sont deux entiers relatifs non nuls,
$PGCD(a\,;b)=1 \;\Leftrightarrow\;$ il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\times u+b\times v=1$

Démonstration :
$\boxed{\Leftarrow}$: Supposons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\times u+b\times v=1$. Soit d un diviseur commun positif à a et b, alors d divise la combinaison entière $a\times u+b\times v$ et par égalité, d divise 1. d est par conséquent égal à 1, par suite le seul diviseur commun à a et b est 1 d'où $PGCD(a\,;b)=1$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Remarquons au préalable que pour tout réel x non nul, $|x|=\operatorname{sgn}(x)\times x$ où $\begin{cases}\operatorname{sgn}(x)=1 \text{ si } x>0\\ \operatorname{sgn}(x)=-1 \text{ si } x<0\end{cases}$

Si a et b sont entiers naturels non nuls, le résultat est une conséquence directe du théorème de Bachet-Bezout (voir chapitre précédent), si maintenant a et b sont entiers relatifs non nuls, alors $|a|$ et $|b|$ sont entiers naturels non nuls premiers entre eux puisque $PGCD(|a|\,;|b|)=PGCD(a\,;b)=1$,
il existe donc par application du théorème de Bachet-Bezout deux entiers relatifs u et v tels que
$|a|\times u+|b|\times v=1 \Leftrightarrow a\underbrace{\operatorname{sgn}(a)\times u}_{U\in\mathbb{Z}}+b\underbrace{\operatorname{sgn}(b)\times v}_{V\in\mathbb{Z}}=1 \Leftrightarrow a\times U+b\times V=1\,;U\in\mathbb{Z}\,;V\in\mathbb{Z}$ C.Q.F.D.

Remarque : Ce résultat fournit une réciproque au théorème de Bachet-Bezout dans l'unique cas où les nombres a et b sont premiers entre eux.

Méthode générale de détermination des coefficients u et v dans le théorème de Bezout **:**
La méthode va être explicitée sur un exemple, elle fonctionne dans le cadre du théorème de Bachet-Bezout pour la détermination de deux entiers relatifs u et v tels que :
$a \times u + b \times v = d$ où $d = PGCD(a\,;b)$ est quelconque.

Les nombres 333 et 112 sont premiers entre eux (vérifiez le !), déterminons deux entiers relatifs u et v tels que $333u + 112v = 1$.
Pour ce faire appliquons l'algorithme d'Euclide à la recherche de $PGCD(333,112)$, nous obtenons la suite de divisions euclidiennes :

- $333 = 112 \times 2 + 109$
- $112 = 109 \times 1 + 3$
- $109 = 3 \times 36 + 1$
- $3 = 1 \times 3 + 0$ ⟵ arrêt de l'algorithme

Expression des restes successifs

- $333 - 112 \times 2 = 109$
- $112 - 109 \times 1 = 3$
- $109 - 3 \times 36 = 1$

Réinjection par étapes des restes

- $333 - 112 \times 2 = \mathbf{109}$
- $112 - \mathbf{109} \times 1 = \mathbf{3} \longrightarrow 112 - (333 - 112 \times 2) \times 1 = \mathbf{3}$
- $\mathbf{109} - \mathbf{3} \times 36 = 1 \longrightarrow (333 - 112 \times 2) - (112 - (333 - 112 \times 2) \times 1) \times 36 = 1$

$\Leftrightarrow 333 - 112 \times 2 - 36 \times 112 + 36 \times 333 - 72 \times 112 = 1$
$\Leftrightarrow 37 \times 333 - 110 \times 112 = 1$
$\Leftrightarrow 333u + 112v = 1$ avec $u = 37$ et $v = -110$

On arrive maintenant au théorème le plus important de ce chapitre :

Propriété 3 : *Théorème de Gauss* (*Démonstration exigible*)
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif.
Si a divise $b \times c$ et si a est premier avec b, alors a divise c.

Démonstration :
Comme a divise $b \times c$, il existe un entier relatif k tel que $b \times c = k \times a$ (*).
Comme $PGCD(a\,;b) = 1$, il existe par Bezout deux entiers relatifs u et v tels que $a \times u + b \times v = 1$
ce qui devient après multiplication par l'entier relatif c : $a \times (u \times c) + \underbrace{(b \times c)}_{= k \times a \text{ par } (*)} \times v = c \Rightarrow a \times \underbrace{(uc + kv)}_{K \in \mathbb{Z} \text{ comme combinaison d'entiers.}} = c$.

Il existe ainsi un entier relatif K tel que $c = K \times a$, par suite a divise c. C.Q.F.D.

Propriété 4 :
Soient a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.
Si p divise le produit $a \times b$, alors p divise a ou p divise b.

Démonstration :
Si p divise a c'est terminé.
Sinon si p ne divise pas a, comme p est premier alors p est premier avec a (voir la **propriété 1**) mais comme p divise le produit $a \times b$, par le théorème de Gauss, p divise b. C.Q.F.D.

Propriété 5 : *Critère de divisibilité par un produit* (*Démonstration exigible*)
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux et soit n un entier naturel.
Si n est divisible par a et par b, alors n est divisible par le produit $a \times b$.

***Démonstration* :**
n est divisible par a et b, il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que : $n = k \times a = k' \times b$.
Puisque évidemment a divise $k \times a$ alors par égalité, a divise $k' \times b$ et puisque a et b sont premiers entre eux, a divise k' par le théorème de Gauss, on peut donc écrire $k' = a \times u$ avec $u \in \mathbb{Z}$.
On a par suite : $n = k' \times b = a \times u \times b = u \times (a \times b)$ avec $u \in \mathbb{Z}$. On en conclut que $a \times b$ divise n ce qui achève la démonstration.

***Exemple et mise en garde* :**

- Si un nombre est divisible par 5 et par 6, alors il est divisible par 30, puisque 5 et 6 sont premiers entre eux.
- Le résultats devient **FAUX** si a et b ne sont pas premiers entre eux comme en témoigne l'exemple suivant : 12 divise 24 et 8 divise 24 cependant : $12 \times 8 = 96$ ne divise pas 24 ! (bien sûr cela vient du fait que $PGCD(12\,;8) = 4 \neq 1$ ...)

Propriété 6 : *Théorème de factorisation par PGCD*
Soient a et b des entiers relatifs non nuls et d un entier naturel non nul.
$d = PGCD\ (a\ ;\ b)$ $\Leftrightarrow$ $a' = \dfrac{a}{d}$ et $b' = \dfrac{b}{d}$ sont des entiers relatifs non nuls premiers entre eux.
$\Leftrightarrow$ $a = d \times a'$ et $b = d \times b'$ avec a' et b' deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux.

Démonstration
Voir le Devoir Maison numéro 5

Exercices sur les nombres premiers entre eux

Exercice 1
Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?
12 et 15 ; 34 et 39 ; 78 et 126 ; 245 et 515 ; 13 et 12813

Exercice 2
Démontrer que toute fraction $\dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$ est égale à une fraction $\dfrac{p'}{q'}$ irréductible .
(c'est-à-dire telle que p' et q' soient premiers entre eux)

Exercice 3

- Démontrer, en utilisant le théorème de Bezout, la propriété : « le PGCD de deux entiers naturels non nuls et consécutifs est égal à 1 ».
- Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, les entiers n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a = 8n + 3$ et $b = 3n + 1$. Déterminer une combinaison entière de a et b indépendante de n. En déduire $PGCD(a\,;b)$.

- Démontrer que pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 4
Démontrer que la droite d'équation $12x - 21y = 1$ n'admet aucun point ayant des coordonnées entières.

Exercice 5
Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que :
a/ $12x = 7y$ **b**/ $11x - 24y = 0$ **c**/ $25x + 35y = 0$

Exercice 6 (Fondamental : à savoir refaire parfaitement)

- En utilisant l'algorithme d'Euclide démontrer que 812 et 451 sont premiers entre eux et déterminer des entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $812u_0 + 451v_0 = 1$.
- Déterminer tous les entiers relatifs u et v tels que $812u + 451v = 1$.
- Déterminer tous les entiers relatifs u et v tels que $22u + 10v = 14$. Montrer qu'il n'existe qu'un seul couple de solutions $\left(u_0\,;v_0\right)$ tel que $0 \leq u_0 \leq 5$.

Exercice 7
1/ On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la droite (D) d'équation $3x + 5y - 1 = 0$
Déterminer tous les points de (D) à coordonnées entières.
2/ Déterminer tous les points à coordonnées entières de (D) appartenant aussi au disque de centre O et de rayon 10.

Exercice 8
1/ On suppose qu'il existe deux entiers relatifs non nuls p et q premiers entre eux tels que $2q^2 - p^2 = 0$
Montrer qu'alors p est un nombre pair et en déduire que q est aussi un nombre pair. Conclure.
2/ Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers relatifs.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer ***sans utiliser les congruences*** que :
1/ $n(n + 1)$ est divisible par 2.
2/ $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 6.
3/ $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ est divisible par 24.
4/ $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ est divisible par 120.

Exercice 10
Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $PGCD(x\,;y) = 12$ et $x + y = 96$.

Exercice 11
1/ Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $A = n+2$ divise $B = 2n-1$.
2/ Démontrer que pour tout entier relatif n, $A = n+2$ et $C = 2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
3/ Déterminer tous les entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2+2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

Exercice 12
On considère deux entiers relatifs a et b. Montrer que si 3 divise a^2+b^2 alors 3 divise a ou 3 divise b.