2nde. Test 10 - *Correction*

Ex 1 : (4 points) *Pour répondre aux questions suivantes on pourra s'aider des représentations graphiques des fonctions carré et inverse :*

1. *f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.*

a. *Calculer les images des réels* $-\sqrt{6}$; $1-\sqrt{2}$; 10^{-3}

$f\left(-\sqrt{6}\right) = \left(-\sqrt{6}\right)^2 = \boxed{6}$ $\quad$ $f\left(1-\sqrt{2}\right) = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 1-2\sqrt{2}+2 = \boxed{3-2\sqrt{2}}$ $\quad$ $f\left(10^{-3}\right) = \left(10^{-3}\right)^2 = \boxed{10^{-6}}$

b. *Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?*

$f(x) = 12 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}\right)$ les antécédents de 12 sont : $\boxed{-2\sqrt{3}\,;\,2\sqrt{3}}$

2. *On note g la fonction inverse.*

a. *Calculer l'image par g de chacun des réels suivants :* $-0,02$; 10^{-3} ; $\dfrac{2}{3}$

$g(-0,02) = \dfrac{1}{-0,02} = \boxed{-50}$ $\quad$ $g\left(10^{-3}\right) = \dfrac{1}{10^{-3}} = \boxed{10^3}$ $\quad$ $g\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

b. *Quels sont les antécédents éventuels de chacun des réels suivants :* $-\dfrac{2}{3}$; 10^2 ; $0,02$?

$\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \boxed{-\dfrac{3}{2}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{x} = 10^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{10^2} = \boxed{10^{-2}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{x} = 0,02 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{0,02} \Leftrightarrow x = \boxed{50}$

c. *Entourer la seule réponse exacte : « x est un nombre réel non nul, $x^2 < \dfrac{1}{x}$ quand :*

RÉPONSE A : $x < 0$ $\quad$ $\boxed{\textbf{RÉPONSE B : } 0 < x < 1}$ $\quad$ **RÉPONSE C :** $x > 1$ $\quad$ **RÉPONSE D :** jamais »

3. *Donner l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :*

a. $x^2 > 25$ $\quad$ $S =]-\infty\,;\,-5[\cup]5\,;\,+\infty[$

b. $4 \le x^2 \le 7$ $\quad$ $S = \left[-\sqrt{7}\,;\,-2\right] \cup \left[2\,;\,\sqrt{7}\right]$

c. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{5}$ $\quad$ $S =]-\infty\,;\,0[\cup]5\,;\,+\infty[$

d. $\dfrac{1}{x} \ge 2$ $\quad$ $S = \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$

4. **a.** *si $x \in [-1\,;\,3]$, à quel intervalle appartient x^2 ?*

$[0\,;\,9]$

b. *$x \in]-4\,;\,-2[$, à quel intervalle appartient x^2 ?*

$]4\,;\,16[$

c. *$x \in [-10\,;\,-1]$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?*

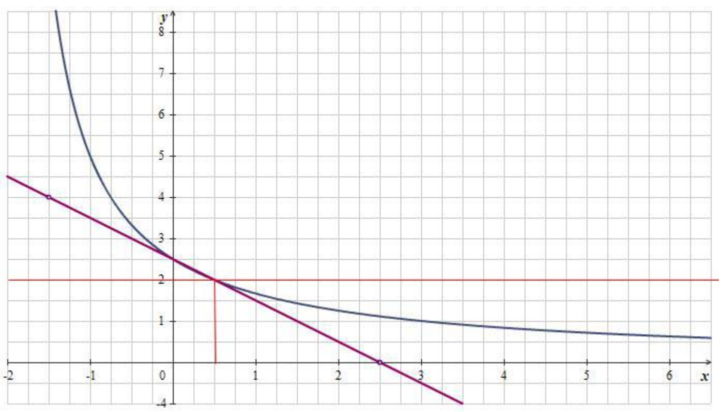
$[-1\,;\,-0,1]$

d. *$x \in [-1\,;\,+\infty[$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?*

$]-\infty\,;\,-1] \cup]0\,;\,+\infty[$

Ex 2 : (2 points) *Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$.*
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal ci-dessous.

1. *Résoudre graphiquement $f(x) \ge 2$.* $\quad$ $\boxed{S = \left]-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right]}$



2. *Soit a et b deux réels tels que $-2 < a < b$*
Comparer $f(a)$ et $f(b)$, en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

On a : $-2 < a < b$ $\quad$ On ajoute 2

$0 < a+2 < b+2$ $\quad$ Or $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $\dfrac{1}{a+2} > \dfrac{1}{b+2}$ $\quad$ On multiplie par 5 ($5 > 0$)

Donc : $\dfrac{5}{a+2} > \dfrac{5}{b+2}$ $\quad$ d'où : $f(a) > f(b)$

La fonction f est décroissante sur $]-2;+\infty[$

Bonus :

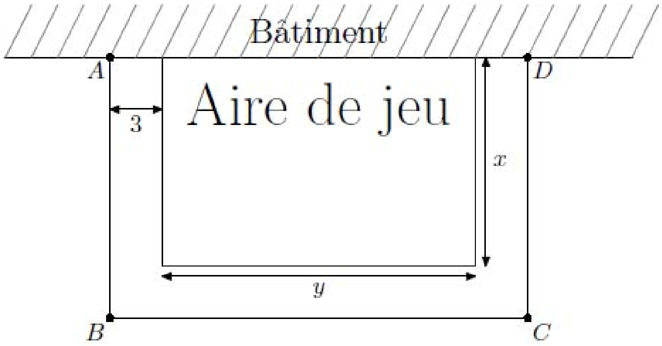
3. *Tracer dans le même repère, la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = -x+2,5$*

4. *Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$*

Pour $x \neq -2$, on a : $\dfrac{5}{x+2} = -x+2,5 \Longleftrightarrow 5 = (-x+2,5)(x+2) \Longleftrightarrow 5 = -x^2-2x+2,5x+5 \Longleftrightarrow 0 = -x^2+0,5x$

Ainsi $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x(-x+0,5) = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 0,5)$ $\quad$ $\boxed{S = \{0\,;\,0,5\}}$

Ex 3 :(4 points) *On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à* 10 *m. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de* 3 *m de large comme l'indique le croquis ci-dessous.*



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur ℓ de la clôture : $\ell = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu ($x > 0$ et $y > 0$).

1. *Exprimer la longueur ℓ de la clôture en fonction des valeurs de x et de y.* $\ell = 2\times(x+3)+y+3+3 \iff \boxed{\ell = 2x+y+12}$
2. *On dispose de* 100 *mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :*
   - **a.** *Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.*
     $100 = 2x+y+12 \iff 100-12-2x = y \iff \boxed{y = 88-2x}$
   - **b.** *Justifier que la valeur de x doit être inférieure à* 44.
     $y > 0 \iff 88-2x > 0 \iff -2x > -88 \iff x < \dfrac{-88}{-2} \iff \boxed{x < 44}$
   - **c.** *Justifier que l'aire de jeu a pour aire :* $A(x) = 88x-2x^2$
     $A(x) = x\times y = x\times(88-2x) = \boxed{88x-2x^2}$
3. **a.** *Justifier l'égalité :* $A(x) = 968-2(x-22)^2$
   En développant : $968-2(x-22)^2 = 968-2\left(x^2-44x+484\right) = 968-2x^2+88x-968 = 88x-2x^2$
   d'où $\boxed{A(x) = 968-2(x-22)^2}$
   - **b.** *En déduire la croissance de la fonction A sur l'intervalle* $]0\,;\,22]$.
     Soit $0 < a < b \leq 22$ On soustrait 22
     Donc : $-22 < a-22 < b-22 \leq 0$ Or la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$
     Donc : $484 > (a-22)^2 > (b-22)^2 \geq 0$ On multiplie par -2 ($-2 < 0$)
     Donc : $-968 < -2(a-22)^2 < -2(b-22)^2 \leq 0$ On ajoute 968
     Donc : $0 < 968-2(a-22)^2 < 968-2(b-22)^2 \leq 968$ d'où : $f(a) < f(b)$
     La fonction A est croissante sur $]0\,;\,22]$
   - **c.** *En déduire la décroissance de la fonction A sur l'intervalle* $[22\,;\,44[$.
     Soit $22 \leq a < b < 44$ On soustrait 22
     Donc : $0 \leq a-22 < b-22 < 22$ Or la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$
     Donc : $0 \leq (a-22)^2 < (b-22)^2 < 484$ On multiplie par -2 ($-2 < 0$)
     Donc : $0 \geq -2(a-22)^2 > -2(b-22)^2 > -968$ On ajoute 968
     Donc : $968 \geq 968-2(a-22)^2 > 968-2(b-22)^2 > 0$ d'où : $f(a) > f(b)$
     La fonction A est décroissante sur $[22\,;\,44[$
4. *En déduire les dimensions afin que les* 100 *mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.*

x	0	22	44
$A(x)$	0 ↗	968	↘ 0

L'aire est maximale pour $\boxed{x = 22}$ donc $y = 88-2\times 22 = 44$; $\boxed{y = 44}$