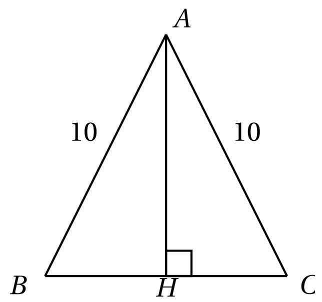
Ex 1 : (4 points) *On considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A.*
On note H le pied de la hauteur issue de A. On pose $AB = AC = 10$ et $BC = x$ avec $x \geq 0$.

1. *Exprimer la hauteur AH en fonction de x.*



J'applique le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H

$AH^2 + HC^2 = AC^2 \quad \Leftrightarrow AH^2 = AC^2 - HC^2$

Comme le triangle ABC est isocèle en A, le point H est le milieu de $[BC]$ et $HC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{x}{2}$

Ainsi $AH^2 = 10^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 100 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{400}{4} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{400 - x^2}{4}$

AH représente une longueur, donc sa valeur numérique est positive, par suite : $AH = \sqrt{\dfrac{400 - x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{400 - x^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{400 - x^2}}{2}$

2. *On désigne par f la fonction qui à chaque réel x de l'intervalle $[0;20]$ associe l'aire $f(x)$ du triangle ABC ,*
. *montrer que $f(x) = \dfrac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.*

$$f(x) = aire(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = BC \times AH \times \frac{1}{2} = x \times \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4} = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$$

3. *Déterminer, en utilisant votre calculatrice, une valeur approchée de x* (arrondir à 10^{-1}) *pour laquelle l'aire*
. *du triangle ABC est maximale.* $x \simeq 14{,}1$.

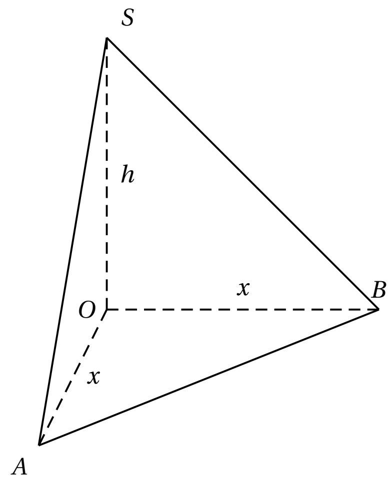
- Je commence par exemple par faire un tableau de valeur de la fonction f pour x variant de 0 à 20 avec un pas de 1
  Je trouve alors que le maximum de $f(x)$ est obtenu pour x proche de 14

- Je modifie alors ce tableau pour obtenir les valeurs de la fonction pour x variant de 13 à 15 avec un pas de $0{,}1$
  Je trouve alors que le maximum de $f(x)$ est obtenu pour x proche de $14{,}1$

- Je modifie de nouveau ce tableau pour obtenir les valeurs de la fonction pour x variant de 14 à $14{,}2$ avec un pas de $0{,}01$
  Je trouve alors que le maximum de $f(x)$ est obtenu pour x proche de $14{,}14$

  Ainsi l'aire du triangle est maximale pour une valeur de x vérifiant $14{,}13 < x < 14{,}15$ ce qui me permet d'obtenir la valeur arrondie à 10^{-1} : $x \simeq 14{,}1$

Ex 2 :(6 points)



Un flacon à la forme d'un coin de pavé :
il a un volume de $200\ cm^3$.
$[OS]$ *est la hauteur de cette pyramide, la base est un triangle isocèle rectangle* OAB.

On pose $h = OS$ *et* $x = OA$*, exprimés en cm.*

Les trois faces OAB, SOA *et* SOB *sont recouvertes d'une peinture métallique,*
la face SAB *reste transparente.*
On recherche la forme à donner à ce flacon afin d'utiliser le minimum de peinture.

1. *Exprimer le volume du flacon en fonction de h et de x*
. *puis en déduire h en fonction de x sachant que le volume du flacon est de* $200\ cm^3$.

Soit V le volume du flacon, on a :

$$V = \frac{aire(base) \times hauteur}{3} = \frac{aire(OAB) \times OS}{3} = aire(OAB) \times OS \times \frac{1}{3} = \frac{x \times x}{2} \times h \times \frac{1}{3} = \frac{x \times x \times h}{2 \times 3} = \frac{x^2 \times h}{6}$$

Comme $V = 200\ \text{cm}^3$ je peux écrire : $\left(200 = \frac{x^2 \times h}{6}\right) \Leftrightarrow \left(200 \times 6 = x^2 \times h\right) \Leftrightarrow \left(h = \frac{200 \times 6}{x^2}\right)$ ainsi $h = \frac{1200}{x^2}$

2. a. *Déterminer l'aire de chacune des faces peintes, en fonction de x et de h.*

$aire(OAB) = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$ de même $aire(SOA) = aire(SOB) = \frac{x \times h}{2}$

b. *En déduire l'aire totale peinte, et exprimer cette aire en fonction de x seulement. On la notera* $f(x)$.

$$f(x) = aire(OAB) + aire(SOA) + aire(SOB) = \frac{x^2}{2} + \frac{x \times h}{2} + \frac{x \times h}{2} = \frac{x^2}{2} + x \times h = \frac{x^2}{2} + x \times \frac{1200}{x^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1200}{x}$$

3. a. *Déterminer, en utilisant votre calculatrice, une valeur approchée de x (* arrondir à 10^{-1} *)*
. *pour laquelle la fonction f définie sur* $[2;20]$ *par* $f(x) = \frac{1200}{x} + \frac{x^2}{2}$ *est minimale .*

- Je commence par exemple par faire un tableau de valeur de la fonction f pour x variant de 2 à 20 avec un pas de 1
  Je trouve alors que le minimum de $f(x)$ est obtenu pour x proche de 11
- Je modifie alors ce tableau pour obtenir les valeurs de la fonction pour x variant de 10 à 12 avec un pas de $0,1$
  Je trouve alors que le minimum de $f(x)$ est obtenu pour x proche de $10,6$
- Je modifie de nouveau ce tableau pour obtenir les valeurs de la fonction pour x variant de $10,5$ à $10,7$ avec un pas de $0,01$
  Je trouve alors que le minimum de $f(x)$ est obtenu pour x proche de $10,63$

  Ainsi on utilise le minimum de peinture pour une valeur de x vérifiant $10,62 < x < 10,64$ ce qui me permet d'obtenir la valeur arrondie à 10^{-1} : $x \simeq 10,6$

. **b.** *En déduire une valeur approchée de la hauteur h permettant d'utiliser le minimum de peinture.*

pour $x \simeq 10,6$ j'obtiens $h = \frac{1200}{10,6^2} \simeq 10,68$