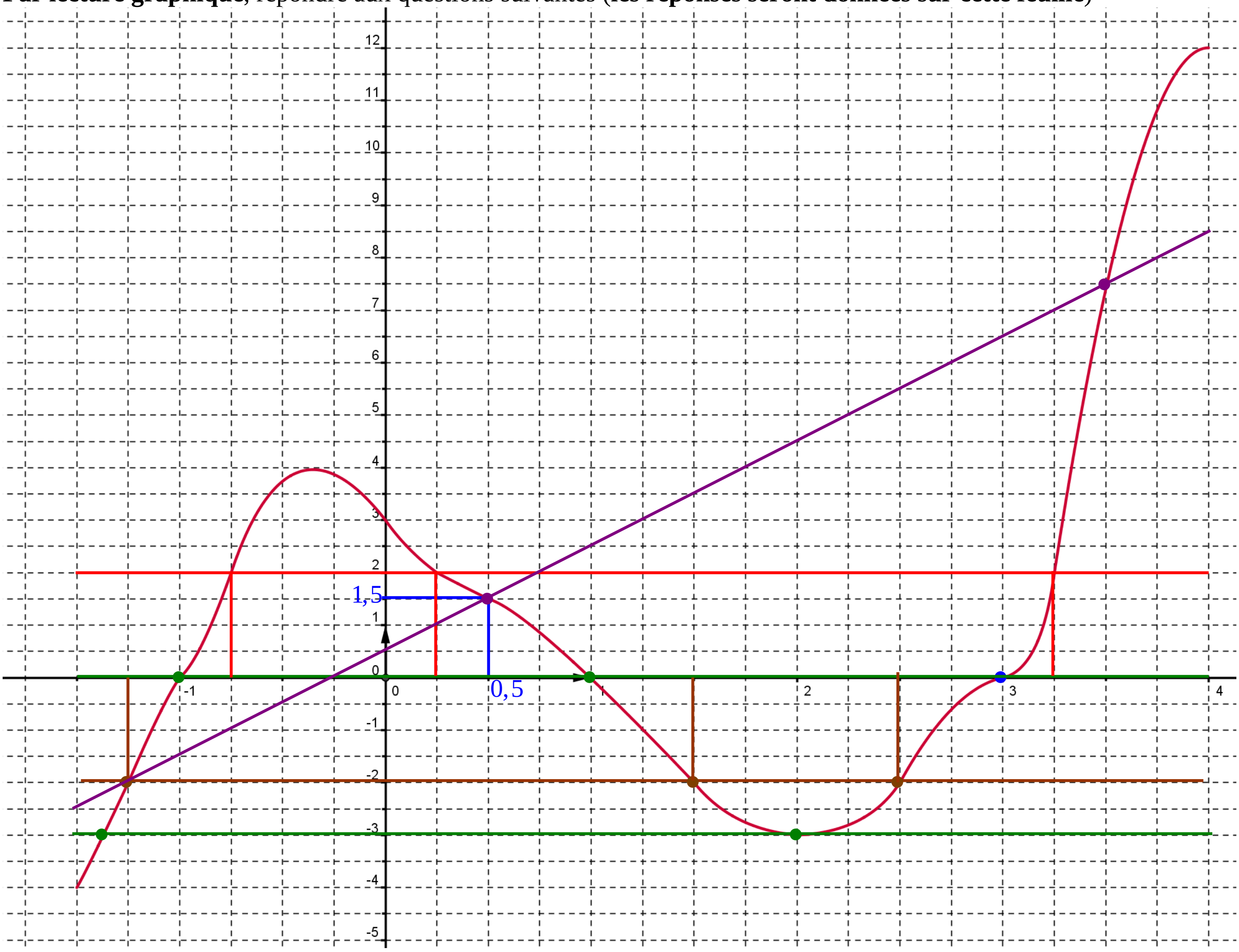
Correction

DEVOIR COMMUN 2nde 2010
MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé.

<u>Exercice n°1</u> : (5,25 *points*) Voici la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-1,5\ ;\ 4]$ dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes (**les réponses seront données sur cette feuille**)



I- Fonction f :

1) Déterminer graphiquement l'image de 0,5 par la fonction f . $f(0,5)=1,5$

Lire $f(3)$. $f(3)=0$

2) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f . il y a trois antécédents de 0 par f , les nombres : -1 ; 1 et 3 .
Donner un nombre qui possède exactement deux antécédents. Le nombre -3 a exactement deux antécédents.

3) Sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ f admet-elle un minimum ? Si oui, quel est-il ? oui, -3 est le minimum de f sur $[1\ ;\ 3]$

4) Par lecture graphique, déterminer le tableau de signes de f sur $[-1,5\ ;\ 4]$.

x	$-1,5$		-1		1		3		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5) a) Résoudre sur $[-1,5\ ;\ 4]$ l'équation $f(x)=-2$ graphiquement je trouve : $S=\{-1,25\ ;\ 1,5\ ;\ 2,5\}$

b) Résoudre sur $[-1,5\ ;\ 4]$: $f(x)\leq 2$ graphiquement je trouve : $S=[-1,5\ ;-0,75]\cup[0,25\ ;3,25]$

II- Fonction g : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x+0,5$

1) Quelle est la nature de la courbe représentative de g ? Justifier. c'est une droite car g est une fonction affine

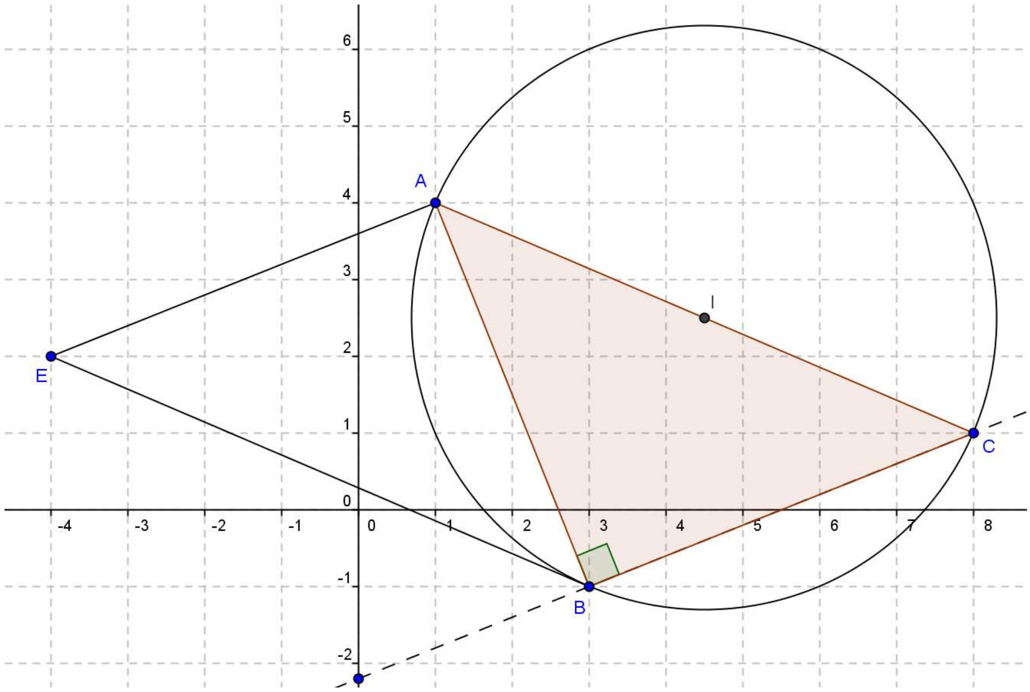
2) Résoudre graphiquement sur $[-1,5\ ;\ 4]$ l'inéquation $f(x)>g(x)$. $S=]-1,25\ ;0,5[\cup]3,5\ ;4]$

<u>Exercice n°2</u> : (4,5 *points*) **à rédiger sur une feuille de copie séparée**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points suivants :

$A(1\,;\,4)$, $B(3\,;-1)$, $C(8\,;\,1)$ et $D\left(0\,;\dfrac{-11}{5}\right)$.

1) Placer les points et compléter le dessin au fur et à mesure.



2) Calculer la longueur AB. $AB^2=(3-1)^2+(-1-4)^2=4+25=29$ donc $AB=\sqrt{29}$

3) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

$BC^2=(8-3)^2+(1-(-1))^2=25+4=29$ donc $AB^2=BC^2 \Leftrightarrow AB=BC$; le triangle ABC est **isocèle** en B

$AC^2=(8-1)^2+(1-4)^2=49+9=58$ et $AB^2+BC^2=29+29=58$

comme $AC^2=AB^2+BC^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore : le triangle ABC est **rectangle** en B.

4) Calculer les coordonnées de I centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Comme ABC est rectangle en B, il s'inscrit dans le cercle de diamètre $[AC]$,

on a $I\left(\dfrac{x_A+x_C}{2};\dfrac{y_A+y_C}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\dfrac{1+8}{2};\dfrac{4+1}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

5) Prouver que les points B, C et D sont alignés.

Les points B,C et D sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8-3\\1-(-1)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0-3\\\dfrac{-11}{5}-(-1)\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\\dfrac{-6}{5}\end{pmatrix}$ sont colinéaires car : $5\times\left(\dfrac{-6}{5}\right)=2\times(-3)$ donc les points B,C et D sont bien alignés

6) Calculer les coordonnées du point E tel que ACBE soit un parallélogramme.

ACBE est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-3\\y_E-(-1)\end{pmatrix}=\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1-8\\4-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_E-3=-7\\y_E-(-1)=3\end{cases}$

ainsi $x_E=-4$ et $y_E=2$ on a $E(-4;2)$

Exercice n°3 : (1,75 *points*) **les réponses seront données sur cette feuille**

Dans cet exercice vous devez utiliser votre calculatrice.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$ par $f(x)=0,04\times(x^3-3x^2+2x)$

1) Compléter le tableau de valeurs ci–dessous.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–2,40	–0,96	–0,24	0	0	0	0,24	0,96	2,40

2) Donner des paramètres de la fenêtre qui permettent de visualiser la courbe dans son intégralité sur son ensemble de définition.

X_{min} = –3 X_{max} = 5 Y_{min} = –2,40 Y_{max} = 2,40

3) La courbe de f étant alors représentée avec les données ci–dessus, deux élèves font les affirmations suivantes : Elève 1 « La fonction f est constante et égale à 0 sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$».

Elève 2 « Il existe un nombre réel x tel que $0\le x\le 2$ et $f(x)>0$ ».

Chacune de ces affirmations est-elle vraie ou fausse ? (Justifier)

- L'affirmation de l'élève 1 est fausse on ne connaît pas les variations de f sur $\mathbf{]0\ ;\ 1[}$ ni sur $\mathbf{]1\ ;\ 2[}$
Il existe des nombres sur chacun de ces intervalles qui ont une image par f différente de 0 .

- L'affirmation de l'élève 2 est vraie, par exemple $f(0,5)=0,015$ avec $0\le 0,5\le 2$ et $f(0,5)>0$

Exercice n°4 : (5,5 *points*) **à rédiger sur une feuille de copie séparée**

Partie A On considère la fonction f , définie par $f(x)=(x+3)^2-49$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

1) Factoriser $f(x)$. $f(x)=(x+3)^2-7^2=(x+3-7)(x+3+7)=\mathbf{(x-4)(x+10)}$

2) Développer $f(x)$. $f(x)=x^2+6x+9-49=\mathbf{x^2+6x-40}$

Partie B On donne pour la même fonction g , définie sur $\mathbb{R}$, les deux expressions suivantes :

$g(x)=x^2+6x-40$ ou $g(x)=(x-4)(x+10)$

1) Résoudre en utilisant dans chaque cas une expression de g adéquate, les équations et inéquations suivantes :

a) $g(x)=0$ avec l'expression factorisée, j'obtiens : $(x-4)(x+10)=0$

$x-4=0$ ou $x+10=0$ $\boldsymbol{S=\{-10\ ;\ 4\}}$

b) $g(x)=-40$ avec l'expression développée, j'obtiens : $x^2+6x-40=-40$

$x^2+6x=0\Leftrightarrow x(x+6)=0$

$x=0$ ou $x+6=0$ $\boldsymbol{S=\{-6\ ;\ 0\}}$

c) $g(x)\le 0$ avec l'expression factorisée, j'obtiens : $(x-4)(x+10)\le 0$

x	$-\infty$		-10		4		$+\infty$
$x-4$		–		–	0	+	
$x+10$		–	0	+		+	
$(x-4)(x+10)$		+	0	–	0	+	

$\boldsymbol{S=[-10\ ;\ 4]}$

2) Application : ABCD un carré de côté x cm, où x est un réel strictement positif.
BEFG un rectangle tel que BE = 6 cm et CG = 7cm.

a) Calculer en fonction de x l'aire hachurée.

$aire(ABCD)+aire(BEFG)=x^2+6(x+7)=x^2+6x+42$

b) Comment choisir x pour que cette aire soit égale à 82 cm^2 ?

il s'agit de résoudre avec $x \geq 0$, l'équation :

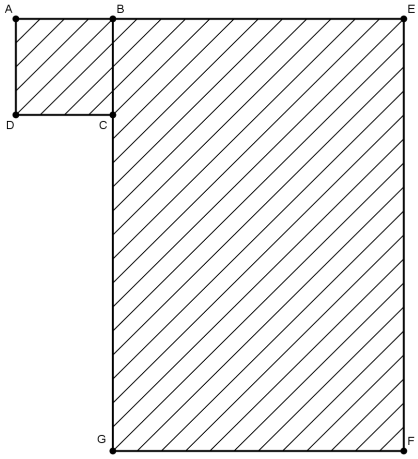
$x^2+6x+42=82 \Leftrightarrow x^2+6x-40=0 \Leftrightarrow g(x)=0$

la seule valeur possible est $\boldsymbol{x=4}$

c) Comment choisir x pour que cette aire soit inférieure ou égale à 82 cm^2 ? il s'agit de résoudre avec $x \geq 0$, l'inéquation :

$x^2+6x+42 \leq 82 \Leftrightarrow x^2+6x-40 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$

donc on doit avoir $\boldsymbol{x \in [0\ ;\ 4]}$



__**Exercice n°5**__ **:** (3 *points*) « production d'une machine » **les réponses seront données sur cette feuille**

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise des boîtes de « 50 gélules auto-bronzantes ».

On effectue un test sur la machine chargée de remplir ces boîtes afin de savoir si la commercialisation est possible. Pour cela, on prélève 250 boîtes à la sortie de la machine et on compte le nombre de gélules présentes dans chaque boîte. On a obtenu le relevé suivant :

Nombre de gélules	47	48	49	50	51	52
Effectif	15	25	67	78	42	23
Fréquence cumulées décroissantes	1	0,94	0,84	0,57	0,28	0,09

$\div 250$

1) Compléter le tableau par les fréquences cumulées décroissantes.

Effectifs cumulés décroissants	250	235	210	143	65	23

2) Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette série. A la calculatrice le trouve la moyenne $\boldsymbol{\overline{x}=\frac{12426}{250}=49,704 \simeq 49,7}$

3) Déterminer la médiane de cette série. *(justifier la réponse)* L'effectif total est pair : $\frac{250}{2}=125$

la médiane est la moyenne de la 125^e valeur : 50 et de la 126^e valeur : 50 donc Me $\boldsymbol{=\frac{50+50}{2}=50}$

4) Calculer les quartiles Q_1 et Q_3 . *(justifier les réponses)*

$\frac{250}{4}=62,5$ le premier quartile est donc la 63^e valeur ordonnée $\boldsymbol{Q_1=49}$

$\frac{3}{4}\times 250=187,5$ le troisième quartile est donc la 188^e valeur ordonnée $\boldsymbol{Q_3=51}$

5) La production de la machine est estimée bonne par le laboratoire si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 80 % des boîtes doivent contenir au moins 49 gélules.
- La moyenne $\overline{x}$ doit être telle que : $(\overline{x}-50)^2 \leq 0,05$ La production de la machine est-elle bonne ?

la question 1) indique que 84 % des boîtes contiennent au moins 49 gélules

la question 2) indique que $(\overline{x}-50)^2=(49,7-50)^2=0,3^2=0,09$

il faut donc régler la machine la production ne vérifie pas la deuxième condition