<u>Correction DEVOIR COMMUN TS</u> (3 heures)

Exercice 1 *(6 points)*

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ *tels que :*

- *Le premier sac* S_1 *contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;*
- *Chacun des sac suivants* $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ *contient 2 billes jaunes et 2 vertes.*

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs, effectués de la manière suivante :

- *On tire au hasard une bille dans le sac* S_1 ;
- *On place la bille tirée de* S_1 *dans le sac* S_2 *, puis on tire au hasard une bille dans* S_2 ;
- *On place la bille tirée de* S_2 *dans le sac* S_3 *, puis on tire au hasard une bille dans* S_3 ;
- *Et ainsi de suite…*

Pour tout entier $n \geq 1$ *, on note* E_n *l'événement « la bille tirée dans le sac* S_n *est verte » on note* $p_n = p(E_n)$.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence.

a. *D'après l'énoncé, donner les valeurs de* $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2)$. *En déduire la valeur de* $p(E_2) = p_2$.

Pour chaque tirage d'une bille dans le sac S_n celui-ci contient 5 billes,
le tirage s'effectuant au hasard il y a équiprobabilité entre les événements élémentaires

$\boldsymbol{p(E_1) = \frac{2}{5}}$, en effet le sac S_1 contient 2 billes vertes favorables à l'évènement E_1

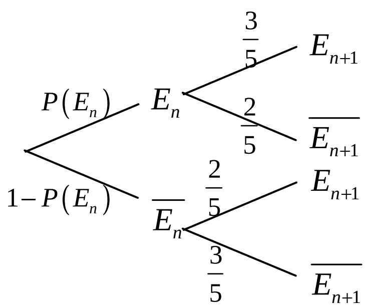
$\boldsymbol{p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5}}$, en effet sachant que la bille tirée dans S_1 est verte,
le sac S_2 contient 3 billes vertes favorables à l'évènement E_2

$\boldsymbol{p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5}}$, en effet sachant que la bille tirée dans S_1 est jaune,
le sac S_2 contient 2 billes vertes favorables à l'évènement E_2

je peux en déduire d'après la formule des probabilités totales avec $p(\overline{E_1}) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$$\boldsymbol{p_2 = p(E_2) = p_{E_1}(E_2) \times p(E_1) + p_{\overline{E_1}}(E_2) \times p(\overline{E_1})} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \boldsymbol{\frac{12}{25}}$$

b. *A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer* $p(E_{n+1})$ *en fonction de* $p(E_n)$ *.En déduire une relation entre* p_{n+1} *et* p_n .



$$\boldsymbol{p(E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) + p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p(\overline{E_n})} = \frac{3}{5} \times p(E_n) + \frac{2}{5} \times [1 - P(E_n)] = \boldsymbol{\frac{1}{5} P(E_n) + \frac{2}{5}}$$

je peux en déduire pour tout entier $n \geq 1$, la relation : $\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{2}{5}}$

2. **Etude d'une suite.**

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_1 = \frac{2}{5}$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ *, pour tout* $n \geq 1$.

a. *Démontrer que pour tout* $n \geq 1$ *on a* $u_n \leq \frac{1}{2}$.

Soit la proposition : « $\boldsymbol{u_n \leq \frac{1}{2}}$ » , montrons par récurrence qu'elle est vraie , pour $n \geq 1$.

Initialisation : la proposition est vraie pour $n = 1$, en effet $u_1 = \frac{2}{5} = 0,4$ donc « $u_1 \leq \frac{1}{2}$ »

Hérédité : je suppose la proposition vraie au rang n : « $u_n \leq \frac{1}{2}$ »

montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$

avec $u_n \leq \frac{1}{2}$ j'obtiens : $\frac{1}{5}u_n \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{5}{10}$$

donc « $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ » .

Conclusion : la proposition est vraie pour $n = 1$, elle est héréditaire donc elle est vraie pour $n \geq 1$.

la suite ($\boldsymbol{u_n}$ **) est majorée par** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

b. *Démontrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}\right) - u_n = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}u_n$ avec $u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $-\frac{4}{5}u_n \geq \frac{-4}{10}$ et $\frac{2}{5} - \frac{4}{5}u_n \geq \frac{2}{5} - \frac{4}{10} \geq 0$

ainsi pour $n \geq 1$ on a : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$ **, la suite (** $\boldsymbol{u_n}$ **) est croissante**

c. *Justifier que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

La suite ($\boldsymbol{u_n}$ **) est croissante et majorée donc elle converge vers** $\boldsymbol{l}$ avec $l \leq \frac{1}{2}$

comme $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ par passage à la limite $l = \frac{1}{5}l + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5}l = \frac{2}{5} \Leftrightarrow l = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ainsi $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

3. **Evolution des probabilités** $\boldsymbol{p(E_n)}$**.**

a. *A l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités* $p(E_n)$.

$p_n = p(E_n)$ avec $p_1 = \frac{2}{5}$ *et* $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$

donc d'après la question **2.** la suite **(** $\boldsymbol{p_n}$ **) est croissante et majorée par** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **, elle converge vers** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

si « n est grand nombre, la probabilité de tirer une boule verte dans le sac S_n est $\frac{1}{2}$ »

b. *A l'aide de votre calculatrice, déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles on a l'inégalité* $0,499\,99 \leq p(E_n) \leq 0,5$ *?*

à la calculatrice, je trouve $p_6 = 0,499\,968$ et $p_7 \simeq 0,499\,9936$

comme la suite (p_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ pour $\boldsymbol{n \geq 7}$ on a l'inégalité $\boldsymbol{0,499\,99 \leq p(E_n) \leq 0,5}$

Exercice 2 *(7 points)*

Les trois questions sont indépendantes.

On considère la fonction f *définie sur l'ensemble* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=(ax+b)e^{x-1}+c$ *, où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la première question.*

La courbe C représentative de f *dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-contre*

- *La courbe C passe par le point* A(1 ; 5), *elle admet la droite D comme tangente en ce point.*
- *Le point* B(0 ; 2) *appartient à la droite D.*
- *La courbe C admet également une tangente horizontale au point d'abscisse* $-\frac{1}{2}$.

1. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

- A l'aide des informations données dans l'énoncé et du graphique, déterminer les valeurs de a, b et c.

La courbe C passe par $\mathrm{A}(1\ ;\ 5)$ donc $f(1)=5$ j'obtiens l'équation : $a+b+c=5$

La droite D est tangente en A donc $f'(1)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2-5}{0-1}=3$

avec $f'(x)=a.\mathrm{e}^{x-1}+(a\ x+b).\mathrm{e}^{x-1}=\mathrm{e}^{x-1}.(a\ x+a+b)$ j'obtiens l'équation : $2a+b=3$

La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ donc $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

j'obtiens l'équation : $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{2}a+b\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a+b=0$

ainsi les trois réels a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c=5 \\ 2a+b=3 \\ \dfrac{1}{2}a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=5 \\ -3b=3 \\ a=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$

d'où $\boldsymbol{f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4}$

2. *On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x,* $f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4$.

a. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{x-1}+4=+\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}=+\infty \end{cases}$

b. *Vérifier que, pour tout réel x,* $f(x)=\dfrac{2}{e}xe^{x}-\dfrac{1}{e}e^{x}+4$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

$f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4=2x.\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}+4=\dfrac{2}{e}xe^{x}-\dfrac{1}{e}e^{x}+4$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e}xe^{x}-\dfrac{1}{e}e^{x}+4=4$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0 \end{cases}$

La droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $-\infty$

c. *On note f ' la fonction dérivée de f. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de f '(x).*

$f'(x)=2.\mathrm{e}^{x-1}+(2\ x-1).\mathrm{e}^{x-1}=\mathbf{e}^{x-1}.(2\ x+1)$

d. *Etablir le tableau de variation de f.*

comme $e^{x-1}>0$ on a $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{-1}{2}$ d'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$f\left(\frac{-1}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Soit Δ la partie du plan située entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1. On souhaite calculer ici l'aire de la partie Δ exprimée en unité d'aires.*

a. *A l'aide d'une intégration par parties calculer la valeur exacte de* $\int_0^1 (2x-1)e^{x-1}dx$.

J'utilise une **intégration par parties** avec $u'(x)=e^{x-1}$ $u(x)=e^{x-1}$

$v(x)=2x-1$ $v'(x)=2$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{x-1}dx=\left[e^{x-1}(2x-1)\right]_0^1-\int_0^1 2.e^{x-1}\,dx=1-\left(-e^{-1}\right)-2\left[e^{x-1}\right]_0^1=1+\frac{1}{e}-2\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{3}{e}-1=\frac{3-e}{e}\ u.a$$

b. *En déduire la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au dixième, de la partie Δ.*

L'aire de la partie Δ est égale à : $\int_0^1 f(x)dx$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (2x-1)e^{x-1}+4\ dx=\int_0^1 (2x-1)e^{x-1}dx+\int_0^1 4\,dx=\frac{3-e}{e}+4(1-0)=\frac{3+3e}{e}\ u.a$$

$$\int_0^1 f(x)dx\simeq 4{,}1\ u.a$$

Exercice 3 *(7 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité graphique 1 cm.
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0 \qquad \text{(E).}$$

Partie A – Résolution de l'équation (E)

1. *Montrer que $-i$ est solution de* (E).

$$(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=i+8-i-17i+8i^2+17i=8-8=0=0$$

donc $-i$ est solution de (E)

2. *Déterminer les réels a, b et c tels que :* $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$.

$$(z+i)(az^2+bz+c)=a.z^3+(b+i\,a).z^2+(c+i\,b).z+c\,i=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$$

par identification : $\begin{cases} a=1 \\ b+i\,a=-8+i \\ c+i\,b=17-8i \\ c\,i=17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$

3. *Résoudre l'équation* (E) *dans l'ensemble des nombres complexes.*

L'équation $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ (E).

s'écrit : $(z+i)(z^2-8z+17)=0$

$z+i=0$ ou $z^2-8z+17=0$

$z=-i$ ou $\Delta=(-8)^2-4\times1\times17=-4=4\mathrm{i}^2$

$\delta=\mathrm{i}\sqrt{4}=2\mathrm{i}$ vérifie : $\delta^2=\Delta$

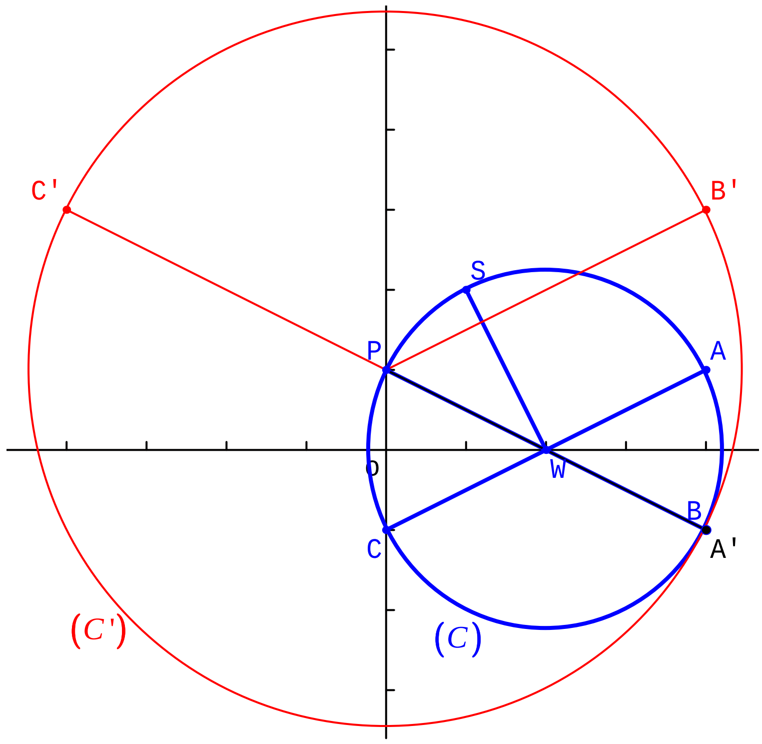
$z=\dfrac{8-2\mathrm{i}}{2}=4-\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{8+2\mathrm{i}}{2}=4+\mathrm{i}$

$$\boldsymbol{S=\{-i\ ;\ 4-i\ ;\ 4+i\}}$$

Partie B

On appelle A, B *et* C *les points d'affixes respectives* $4+i$, $4-i$ et $-i$.

1. *Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.*



2. *Le point* Ω *est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre* Ω *et d'angle de mesure* $\dfrac{\pi}{2}$.

Calculer l'affixe s de S.

l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ s'écrit : $z'-2=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-2)$

ainsi : $s=i(4+i-2)+2=2i-1+2$ $\boldsymbol{=1+2i}$

3. *Démontrer que les points* B, A, S *et* C *appartiennent à un même cercle* (*C*) *dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer* (*C*).

$\mathbf{\Omega A}=|z_A-2|=|4+i-2|=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}$ $\boldsymbol{=\sqrt{5}}$ et $\mathbf{\Omega S=\Omega A}$ puisque S est l'image de A

$\mathbf{\Omega B}=|z_B-2|=|4-i-2|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}$ $\boldsymbol{=\sqrt{5}}$

$\mathbf{\Omega C}=|z_C-2|=|-i-2|=|-2-i|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}$ $\boldsymbol{=\sqrt{5}}$

$$\mathbf{\Omega S=\Omega A=\Omega B=\Omega C}=\sqrt{5}$$

donc les points B , A , S et C appartiennent au cercle (C) de centre Ω d'affixe 2 et de rayon $\sqrt{5}$

4. *A tout point* M *d'affixe* $z \neq 2$, *on associe le point* M' *d'affixe* : $z' = \dfrac{iz+10-2i}{z-2}$.

a. *Déterminer les affixes des points* A', B' *et* C' *associés respectivement aux points* A, B *et* C.

$$\mathbf{z_{A'}} = \frac{iz_A + 10 - 2i}{z_A - 2} = \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} = \frac{2i+9}{2+i} = \frac{(2i+9)(2-i)}{5} = \frac{-5i+20}{5} = \mathbf{4-i}$$

$$\mathbf{z_{B'}} = \frac{iz_B + 10 - 2i}{z_B - 2} = \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} = \frac{2i+11}{2-i} = \frac{(2i+11)(2+i)}{5} = \frac{15i+20}{5} = \mathbf{4+3i}$$

$$\mathbf{z_{C'}} = \frac{iz_C + 10 - 2i}{z_C - 2} = \frac{i(-i)+10-2i}{-i-2} = \frac{-2i+11}{-2-i} = \frac{(-2i+11)(-2+i)}{5} = \frac{15i-20}{5} = \mathbf{-4+3i}$$

b. *Vérifier que* A', B' *et* C' *appartiennent à un cercle* (*C*') *de centre* P, *d'affixe* i. *Déterminer son rayon et tracer* (*C*').

$$\mathbf{PA'} = |z_{A'} - i| = |4-i-i| = |4-2i| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{PB'} = |z_{B'} - i| = |4+3i-i| = |4+2i| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{PC'} = |z_{C'} - i| = |-4+3i-i| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{PA' = PB' = PC' = 2\sqrt{5}}$$

donc les points A' , B' et C' appartiennent au cercle (C') de centre P d'affixe i et de rayon $2\sqrt{5}$

c. *Pour tout nombre complexe* $z \neq 2$, *exprimer* $|z'-i|$ *en fonction de* $|z-2|$.

$$|\mathbf{z'-i}| = \left|\frac{iz+10-2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz+10-2i-i(z-2)}{z-2}\right| = \left|\frac{10}{z-2}\right| = \mathbf{\frac{10}{|z-2|}}$$

d. *Soit* M *un point d'affixe z appartenant au cercle* (*C*). *Démontrer que* $|z'-i| = 2\sqrt{5}$.

Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C) alors $|z-2| = \sqrt{5}$

par suite : $|\mathbf{z'-i}| = \dfrac{10}{|z-2|} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

e. *En déduire à quel ensemble appartiennent les points* M' *associés aux points* M *du cercle* (*C*).

$$M \in (C) \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z'-i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow M' \in (C')$$

Les points M' associés aux points M du cercle (C)
appartiennent au cercle (C') de centre P d'affixe i et de rayon $2\sqrt{5}$