Ex 1 : (3 points) *La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.*

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. *Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} prés, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à $0,3$.*
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

   La probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est : $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} p(X > 6) = 0,3 &\iff 1 - p(X \leqslant 6) = 0,3 \\ &\iff 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-6\lambda}\right) = 0,3 \\ &\iff \mathrm{e}^{-6\lambda} = 0,3 \\ &\iff -6\lambda = \ln 0,3 \\ &\iff \boxed{\lambda = -\frac{\ln 0,3}{6} \simeq 0,2} \end{aligned}$$

2. *À quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?*
   L'instant t pour lequel la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois soit de $0,5$ vérifie :

$$\begin{aligned} p(X \leq t) = 0,5 &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0,5 \\ &\iff \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0,5 \\ &\iff -\lambda t = \ln 0,5 \\ &\iff \boxed{t = -\frac{\ln 0,5}{\lambda} \simeq 3,5} \text{ ans} \end{aligned}$$

3. *Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est* $\mathrm{e}^{-0,4}$.
   La probabilité que le robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est :

$$\boxed{p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{-0,4}}$$

4. *Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} prés, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?*
   $\boxed{p_{X>2}(X > 6)} = \dfrac{p((X > 2) \cap (X > 6))}{p(X > 2)} = \dfrac{p(X > 6)}{p(X > 2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-6\lambda}}{\mathrm{e}^{-2\lambda}} = \mathrm{e}^{-4\lambda} = \boxed{\mathrm{e}^{-0,8}}$

   Remarque : pour une loi de durée de vie sans vieillissement : $p_{X>2}(X > 6) = p(X > 4) = \mathrm{e}^{-0,8}$
5. *On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.*
   À la répétition 10 fois, de manière indépendante, d'une épreuve à 2 issues, je peux associer une variable aléatoire Y qui comptabilise le nombre de robots qui n'ont pas eu de panne au cours des deux premières années. Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10; \mathrm{e}^{-0,4}\right)$
   $\boxed{p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,4}\right)^{10}}$

Ex 2 : (3 points) *Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories :*
les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12 % *des personnels sont des médecins et* 71 % *sont des soignants.*
67 % *des médecins sont des hommes et* 92 % *des soignants sont des femmes.* **On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.**

1. *On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.* Soient les évènements :
   - F : « La personne interrogée est une femme »
   - H : « La personne interrogée est un homme »
   - M : « La personne interrogée est un médecin » S : « La personne interrogée est un soignant »
   - AT : « La personne interrogée est un membre du personnel administratif ou technique ».

   L'énoncé se traduit par les probabilités suivantes : $p(\mathrm{M}) = 0,12$; $p(\mathrm{S}) = 0,71$;
   $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) = 0,67$; $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = 0,92$.

   a. *Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?*
   $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{S} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{S})} \iff \boxed{p(\mathrm{S} \cap \mathrm{F}) = p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{S}) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532}$.

1. **b.** *Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?*

$\boxed{p(\mathrm{M}\cap\mathrm{F}) = p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{M}) = 0,33 \times 0,12 = 0,0396}$.

c. *On sait que* 80 % *du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.*
En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

Les femmes sont 80 % et se répartissent en trois catégories : médecin, soignant, personnel administratif ou technique. Donc :

$p(\mathrm{F}) = 0,80 = p(\mathrm{F}\cap\mathrm{M}) + p(\mathrm{F}\cap\mathrm{S}) + p(\mathrm{F}\cap\mathrm{AT}) \Longleftrightarrow \boxed{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{AT}) = p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{F}\cap\mathrm{M}) - p(\mathrm{F}\cap\mathrm{S}) = 0,80 - 0,0396 - 0,6532 = 0,1072}$

On sait que $p(\mathrm{M}) + p(\mathrm{S}) + p(\mathrm{AT}) = 1 \Longleftrightarrow p(\mathrm{AT}) = 1 - p(\mathrm{M}) - p(\mathrm{S}) = 1 - 0,12 - 0,71 = 0,17$.

Par définition $\boxed{p_{\mathrm{AT}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{AT})}{p(\mathrm{AT})} = \dfrac{0,1072}{0,17} \simeq 0,6306}$.

2. *Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur* $[0\,;\,1]$.
On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 *min et* 20 *min ?*

Soit T la variable aléatoire uniformément répartie sur $[0\,;\,1]$ qui modélise la durée exacte en heure, du trajet domicile-hôpital.

La fonction densité associée est la constante : $f(t) = k = \dfrac{1}{1-0} = 1$ et $p\left(\alpha \leq T \leq \beta\right) = p\left([\alpha\,;\,\beta]\right) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{1-0}\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{1-0} = \beta - \alpha$

Avec $\alpha = 15$ min $= \dfrac{1}{4}$ h et $\beta = 20$ min $= \dfrac{1}{3}$ h j'obtiens : $\boxed{p\left(\dfrac{1}{4} \leq T \leq \dfrac{1}{3}\right) = p\left(\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-0}.\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}$

3. *Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à* 40 *personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard* 40 *noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de* 40 *tirages successifs indépendants avec remise).*
Quelle est la probabilité que, sur les 40 *courriers envoyés,* 10 *exactement soient reçus par des médecins ?*

À la répétition 40 fois, de manière indépendante, d'une épreuve à 2 issues, je peux associer une variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de courriers envoyés à des médecins. Avec $n = 40$ et $p = 0,12 = p(\mathrm{M})$, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(40\,;\,0,12)$

$\boxed{p(X = 10) = \dbinom{40}{10} \times 0,12^{10} \times (1-0,12)^{40-10} \simeq 0,0113}$

Ex 3 : (4 points) *Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.*
Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$*, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.*

1. *Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :*

a. *comprise entre* 50 *et* 100 *km ;*

La probabilité qu'un autocar parcourt une distance inférieure à d sans incident est :

$p(D \leqslant d) = \displaystyle\int_0^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^d = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda d}$

$\boxed{p(50 \leq D \leq 100) = \displaystyle\int_{50}^{100} \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}.\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_{50}^{100} = -\mathrm{e}^{-\frac{100}{82}} + \mathrm{e}^{-\frac{50}{82}} \simeq 0,248} = p(D \leq 100) - p(D \leq 50)$

b. *supérieure à* 300 *km.*

La probabilité qu'un autocar parcourt une distance supérieure à d sans incident est :

$p(D > d) = 1 - p(D \leqslant d) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda d}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda d}$

$\boxed{p(D > 300) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{82}\times 300} \simeq 0,026}$

2. *Sachant que l'autocar a déjà parcouru* 350 *kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des* 25 *prochains kilomètres ?*

Pour une loi de durée de vie sans vieillissement :

$\boxed{p_{D>350}(D > 375) = p(D > 25) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{82}\times 25} \simeq 0,737}$

3. *Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.*

a. *Au moyen d'une intégration par parties, calculer* $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} \, \mathrm{d}x$ *où A est un nombre réel positif.*

j'utilise une **intégration par parties** avec $u'(x) = \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} \quad u(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}$

$v(x) = x \qquad v'(x) = 1$

$$\int_0^A \frac{1}{82} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} . \mathrm{d}x = \left[-x.\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} . \mathrm{d}x = -A\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} - 0 + \left[-82.\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A = -A\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} - 82\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} + 82$$

$$\boxed{\mathrm{I}(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{82}} \, \mathrm{d}x = -A\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} - 82\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} + 82}$$

b. *Calculer la limite de* $I(A)$ *lorsque A tend vers* $+\infty$. *(Cette limite représente la distance moyenne cherchée).*

$$\boxed{\lim_{A \to +\infty} \mathrm{I}(A) = \lim_{A \to +\infty} \left(-A\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} - 82\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} + 82\right) = 82 = \frac{1}{\lambda}}$$

avec $\lim_{A \to +\infty} A\mathrm{e}^{-\frac{A}{82}} = 0$ par croissances comparées.

4. *L'entreprise possède* N_0 *autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre* $\lambda = \frac{1}{82}$.
d étant un réel positif, on note X_d *la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.*

a. *Montrer que* X_d *suit une loi binomiale de paramètres* N_0 *et* $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.

À la répétition N_0 fois, de manière indépendante, d'une épreuve à 2 issues, je peux associer une variable aléatoire X_d qui comptabilise le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Avec $n = \mathrm{N}_0$ et $p = p(D > d) = \mathrm{e}^{-\lambda d}$ $\quad X_d$ suit la loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}\left(\mathrm{N}_0 \,;\, \mathrm{e}^{-\lambda d}\right)}$

b. *Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.*

Il s'agit de l'espérance de la variable aléatoire X_d associée à la loi binomiale $\mathscr{B}\left(\mathrm{N}_0 \,;\, \mathrm{e}^{-\lambda d}\right)$

$$\boxed{E(X_d) = np = \mathrm{N}_0 \times \mathrm{e}^{-\frac{d}{82}}}$$