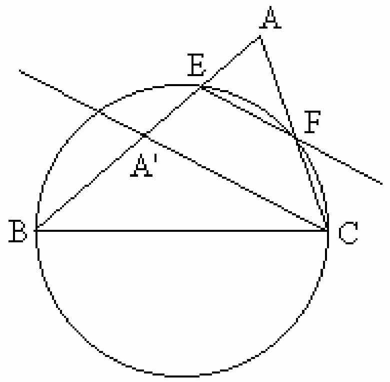
Correction

I. (*6 points*).



ABC *est un triangle isocèle en* B.

Le cercle de diamètre [BC]
coupe respectivement [AB] *en* E *et* [AC] *en* F.

Les droites (EC) *et* (BF) *se coupent en* G.

1. *Démontrer que les droites* (AG) *et* (BC) *sont perpendiculaires.*

E appartient au cercle de diamètre [BC]
or un triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés est un triangle rectangle
donc le triangle EBC est rectangle en E.

On démontre de la même façon que le triangle BFC est rectangle en F.

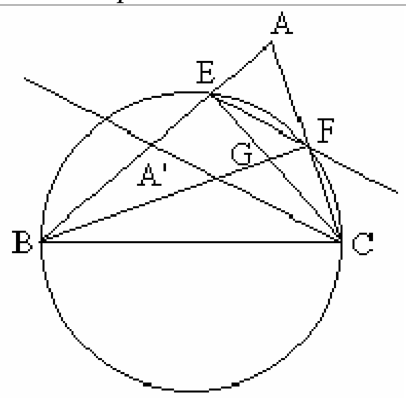
On a donc : (AB)⊥ (EC) et (BF) ⊥ (AC)
par définition les droites (EC) et (BF) sont des hauteurs du triangle ABC.

Les hauteurs (EC) et (BF) du triangle ABC se coupent en G, or les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle ABC donc G est l'orthocentre du triangle ABC.

La droite (AG) est donc aussi une hauteur du triangle ABC, on en déduit (AG) et (BC) perpendiculaires.

La parallèle à la droite (EF) *passant par* C *coupe* (AB) *en* A'

2. *Démontrer que les points* A, A', C *appartiennent à même cercle dont on précisera le centre.*



ABC est un triangle isocèle en B et (BF) sa hauteur,
or dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice de [AC]
donc (BF) est la médiatrice de [AC] et **F le milieu de [AC]** .

Dans le triangle AA'C :
(CA') // (EF) , F milieu de [AC] et E appartient à (AA')
or dans un triangle la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à l'autre côté passe par le milieu du troisième côté donc **E est le milieu de [AA']** .

La droite (EC) coupe perpendiculairement le segment [AA'] en son milieu E
donc (EC) est par définition la médiatrice du segment [AA'].

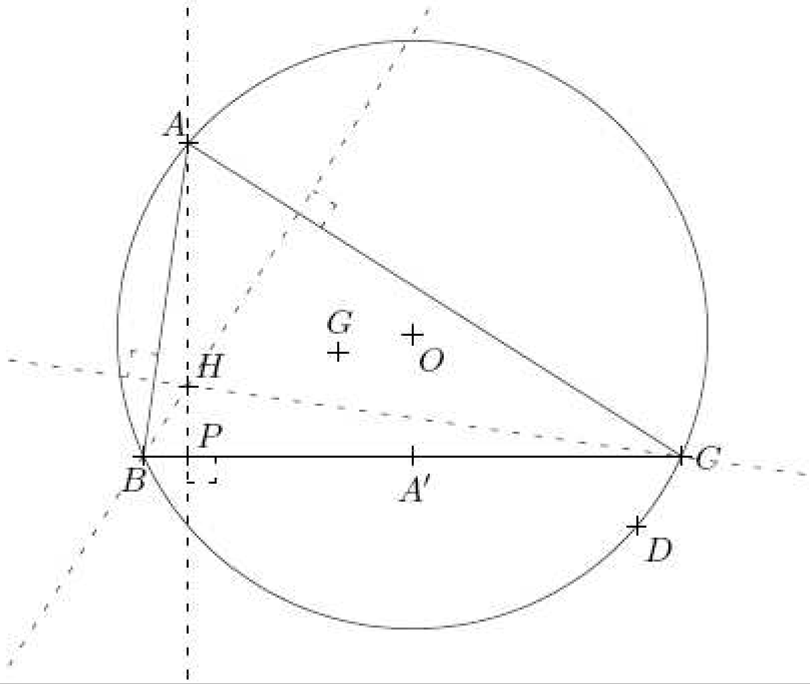
Les droites (EC) et (BF) sont deux médiatrices du triangle AA'C et G est leur point d'intersection or les médiatrices du triangle AA'C sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle AA'C donc G est le centre du cercle circonscrit au triangle AA'C.

(les points A, A' et C appartiennent donc au cercle de centre G).

II. (*8 points*). *Droite d'Euler d'un triangle*

Le but de l'exercice est de démontrer que le centre de gravité G, *l'orthocentre* H *et le centre* O *du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler du triangle et que* OH = 3 OG .

1. *Tracer un triangle* ABC, *construire les points* G, H *et* O *puis placer le point* P *pied de la hauteur issue de* A , *le point* A' *milieu du segment* [BC] *et le point* D *symétrique du point* A *par rapport au point* O



2. *Démontrer que le quadrilatère* BHCD *est un parallélogramme.*

(CH) $\perp$ (AB) car la droite (CH) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC
(BD) $\perp$ (AB) car le triangle ADB inscrit dans le cercle de diamètre [AD] est rectangle en B
Par suite **(CH) et (BD)** étant perpendiculaires à une même droite (AB) **sont parallèles** .
On montre de la même façon que
(BH) et (CD) étant perpendiculaires à une même droite (AC) **sont parallèles** .
Le quadrilatère **BHCD** est donc un **parallélogramme**.

3. *En déduire le centre de gravité du triangle* AHD .

D'après la question précédente, A' est le milieu de [HD] car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.

Le point **G** est situé aux deux tiers du segment [AA'] à partir de A car c'est le centre de gravité de ABC c'est donc également le **centre de gravité du triangle AHD**.

4. *Montrer alors que les points* G, H *et* O *sont alignés et que* OH = 3 OG .

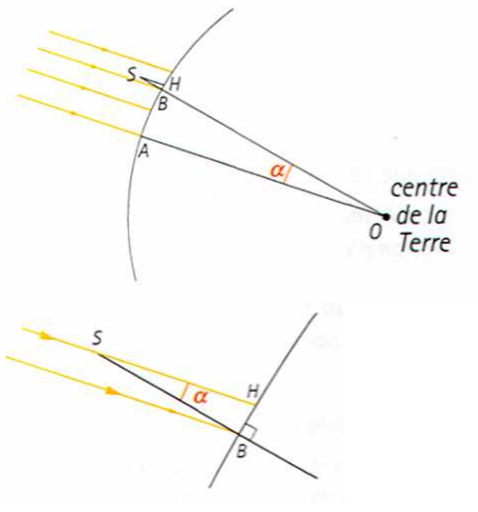
Le point O étant le milieu du segment [AD],
j'en déduis que dans le triangle AHD, la droite (HO) est la médiane issue de H
ainsi G est situé aux deux tiers du segment [HO] à partir du point H

G, H et O sont alignés et OH = 3 OG

III. (*6 points*). *Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène (vers 200 avant J.C.)*

Un certain jour à midi le soleil est au zénith à Assouan (point A) *à l'exacte verticale d'un puit qu'il éclaire jusqu'au fond.*

Au même instant, à $770\,km$ *de là, près d'Alexandrie* (point B), *la tour* $[BS]$ *fait sur le sol une ombre qu'on peut assimiler à un segment* $[BH]$. *Du fait de son grand éloignement, on peut considérer que les rayons du Soleil sont parallèles, donc les angles* $\widehat{\mathrm{AOB}}$ *et* $\widehat{\mathrm{BSH}}$ *sont égaux* (alternes internes).



1. *Sachant que la tour, haute de* 10 mètres, *fait au sol une ombre de* 1,2 mètres *environ, calculer l'angle* α .

SBH est un triangle rectangle en B.

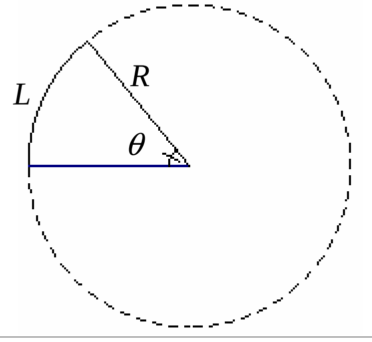
donc $\tan(\alpha) = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BS}}$; $\tan(\alpha) = \dfrac{1{,}2}{10}$.

ainsi $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}2}{10}\right)$.

$\boldsymbol{\alpha \approx 6{,}84°}$

La formule qui permet de calculer la longueur d'un arc de cercle est : $L = \dfrac{\pi}{180} R\theta$,

où θ *est l'angle au centre qui intercepte cet arc*
et R *le rayon du cercle qui définit cet arc.*



2. *En utilisant cette formule,*
déduire de ce qui précède la circonférence terrestre.

$L = \dfrac{\pi}{180} R\alpha$ donc $R = \dfrac{180L}{\pi\alpha}$; $R \approx \dfrac{180 \times 770}{\pi \times 6{,}84}$.

donc $\boldsymbol{R \approx 6450\ km}$.

La circonférence $2\pi R$, est donc égale, approximativement, à **40526 km.**