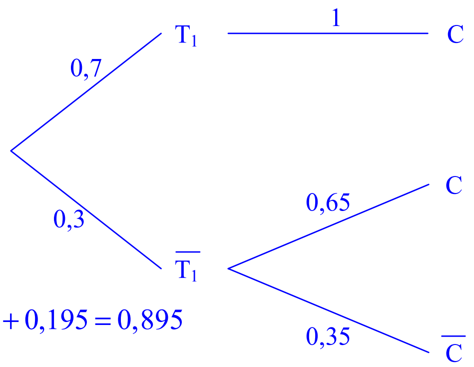
48 Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'événement : « le premier test est positif ».
On note C l'événement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des événements T_1 et C.
Puisqu'une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, $p(T_1) = \frac{70}{100} = 0,7$.

On peut réaliser un arbre :



Pour calculer p(C), on peut passer par l'événement contraire : « être détruit », ce qui revient à échouer aux deux tests :
$p(C) = 1 - p(\overline{T_1} \cap \overline{C}) = 1 - 0,3 \times 0,35 = 1 - 0,105 = 0,895$
On peut également utiliser le principe des probabilités totales :
$p(C) = p(T_1 \cap C) + p(\overline{T_1} \cap C) = 0,7 \times 1 + 0,3 \times 0,65 = 0,7 + 0,195 = 0,895$

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé *a* euros (*a* étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de *a*.
La variable X peut prendre les valeurs :
$a - 1000$ si l'écran passe le premier test avec succès. $p(X = a - 1000) = p(T_1) = 0,7$
$a - 1050$ si l'écran passe le second test avec succès.
$p(X = a - 1050) = p(\overline{T_1} \cap C) = 0,3 \times 0,65 = 0,195$
-1050 si les deux tests échouent : $p(X = -1050) = p(\overline{C}) = 0,105$

x_i	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050
$p(X = x_i)$	0,7	0,195	0,105

b. Exprimer l'espérance de X en fonction de *a*.
$E(X) = (a - 1000)\times 0,7 + (a - 1050)\times 0,195 - 1050\times 0,105 = 0,895a - 1015$

c. À partir de quelle valeur de *a*, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?
L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices dès que $E(X) > 0$.
$E(X) > 0 \Leftrightarrow 0,895a - 1015 > 0 \Leftrightarrow 0,895a > 1015 \Leftrightarrow a > \frac{1015}{0,895}$
c'est-à-dire dès que le prix de vente dépasse 1134,08 €.

49 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.*

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies.
Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. 0,4 $\quad$ $\boxed{\textbf{\textit{b.}}\ 0{,}75}$ $\quad$ ***c.*** $\frac{1}{150}$

Cette probabilité est $\frac{150}{200}=0,75$.

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. 0,3 $\quad$ ***b.*** 0,8 $\quad$ $\boxed{\textbf{\textit{c.}}\ 0{,}4}$

Cette probabilité est $\frac{40}{100}=0,4$.

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :

a. 1,15 $\quad$ ***b.*** 0,4 $\quad$ $\boxed{\textbf{\textit{c.}}\ 0{,}3}$

Cette probabilité est $p(\mathrm{P}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{P})\times p_{\mathrm{P}}(\mathrm{F})=0,75\times 0,4=0,3$.

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. 0,9 $\quad$ ***b.*** 0,7 $\quad$ $\boxed{\textbf{\textit{c.}}\ 0{,}475}$

D'après le ***principe des probabilités totales*** (au besoin, faites un arbre), cette probabilité est $p(\mathrm{F})=p(\mathrm{P}\cap\mathrm{F})+p(\mathrm{B}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{P})\times p_{\mathrm{P}}(\mathrm{F})+p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{F})=0,3+\frac{50}{200}\times\frac{70}{100}=0,475$ mais un peu de logique suffit pour conclure car cette probabilité est forcément entre $\frac{40}{100}$ et $\frac{70}{100}$.

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\frac{4}{150}$ $\quad$ $\boxed{\textbf{\textit{b.}}\ \frac{12}{19}}$ $\quad$ ***c.*** 0,3

Cette probabilité est $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{P})=\frac{p(\mathrm{P}\cap\mathrm{F})}{p(\mathrm{F})}=\frac{0,3}{0,475}=\frac{300}{475}=\frac{12}{19}$.

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. Le choix d'un livre est à chaque fois indépendant du choix précédent (il peut donc lire plusieurs fois un même ouvrage). La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

$\boxed{\textbf{\textit{a.}}\ 1-(0,25)^{20}}$ $\quad$ ***b.*** $20\times 0,75$ $\quad$ ***c.*** $0,75\times(0,25)^{20}$

A chaque visite, il n'y a que deux issues possibles : lire un roman policier (probabilité : 0,75) ou non. Il s'agit donc d'un aléa de Bernoulli. Cet aléa est répété 20 fois de façon indépendate. Le nombre de fois où l'événement « lire un roman policier » est réalisé suit donc la loi binomiale de paramètres 20 et 0,75.

$$p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-\binom{20}{0}\times(0,75)^0\times(0,25)^{20-0}=1-(0,25)^{20}$$