BACCALAUREAT GENERAL

Bac blanc n°5
Mercredi 28 Mai 2014

MATHEMATIQUES

Série : **S Enseignement Obligatoire ou de Spécialité**

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7 ou 9

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Vous pouvez à tout moment admettre le résultat d'une question que vous n'auriez pas su démontrer pour pouvoir continuer à traiter l'exercice en cours à condition de le mentionner clairement sur votre copie.

Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près

Partie A

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en *cl*) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 *cl* peut-être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. A quelles valeurs de la moyenne μ peut-on régler la machine pour respecter cette législation ?

2. En prenant pour valeur de μ la valeur minimale trouvée à la question précédente, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?

3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation. Quelle peuvent être alors les valeurs de μ ?

4. Peut-on satisfaire à ces deux conditions ?

Partie B

Le constructeur de la machine qui sert à remplir les bouteilles annonce pour celle-ci une durée de vie moyenne de 30 ans.
On sait que la durée de vie en années de la machine peut-être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. **a.** Quelle est la valeur de λ ?
b. Quelle est la probabilité pour qu'une machine ait une durée de vie comprise entre 10 et 40 ans ?
c. Quelle est la probabilité pour qu'une machine ait une durée de vie supérieure à 15 ans ?

2. On a extrait de manière indépendante de la production du constructeur 1000 machines et on note Z la variable aléatoire qui décompte le nombre de machines toujours en état de fonctionnement au bout de 15 ans.

a. Quelle est la loi suivie par Z ?

b. Comment interpréter la variable aléatoire $F = \dfrac{Z}{1000}$?

c. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique de F au seuil de 99 %

d. Une étude statistique menée sur 15 ans a permis de déterminer que sur 1000 machines choisies de manière indépendante dans la production du constructeur, 540 d'entre elles étaient toujours en état de fonctionnement au bout de 15 ans. Qu'en déduire ?

e. En utilisant l'étude statistique menée précédemment donner un intervalle auquel la véritable durée de vie moyenne de la machine a plus de 95% de chances d'appartenir.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $0 \leq F(3) \leq 4\mathrm{e}^{-2}$.

Partie B

La fonction *f* considérée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On appelle *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions *f* et *g* dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. Les courbes sont tracées en annexe en page 7.

1. a. Montrer que les variations de la fonction *f* sont bien celles données dans la **partie A**.
On ne demande pas de justifier les limites.

b. Etudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2. Soit *h* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

a. Montrer que la fonction *H* définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=\left(-x^2-2x-1\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction *h* sur $\mathbb{R}$.

b. Soit un réel α supérieur ou égal à 1.
On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$. Déterminer l'aire $A(\alpha)$ exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (3 points)

Partie A

1. Cours : Démontrer que si Z suit la loi normale centrée réduite, alors pour tout $\alpha \in \left]0\,;1\right[$,
il existe un unique réel $\mu_\alpha > 0$ tel que $p(-\mu_\alpha \le Z \le \mu_\alpha) = 1-\alpha$.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $p = 0{,}791$
ainsi que la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{870}$.

2. a. Soit $\alpha \in \left]0\,;1\right[$. Donner l'expression d'un intervalle I_α de fluctuation asymptotique de F
au seuil $1-\alpha$ (On arrondira à 10^{-3} près par excès les coefficients intervenants dans cet intervalle)

b. Quelle est l'influence du paramètre α sur l'amplitude de l'intervalle I_α ?

3. a. Montrer que $\dfrac{339}{870} \in I_\alpha$ si $0{,}791 - 0{,}014\mu_\alpha \le \dfrac{339}{870}$

b. En déduire que $\dfrac{339}{870} \in I_\alpha$ dès que $28{,}668 \le \mu_\alpha$

c. On choisit ici $\mu_\alpha = 28$, quelle est la valeur de α fournie par la calculatrice ?

Remarque : un calculateur ultra puissant a fourni pour $\mu_\alpha = 28$ une valeur de α de l'ordre de 10^{-170}.
Pour informations, la probabilité d'avoir coché les 7 bons numéros en remplissant une grille de loto est de l'ordre de 10^{-8} soit 10^{162} fois plus importante que la valeur α précédente (de l'ordre du milliard de milliards ... de milliards (dire en tout 18 fois « de milliards ») de fois…)

Partie B

En novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine.

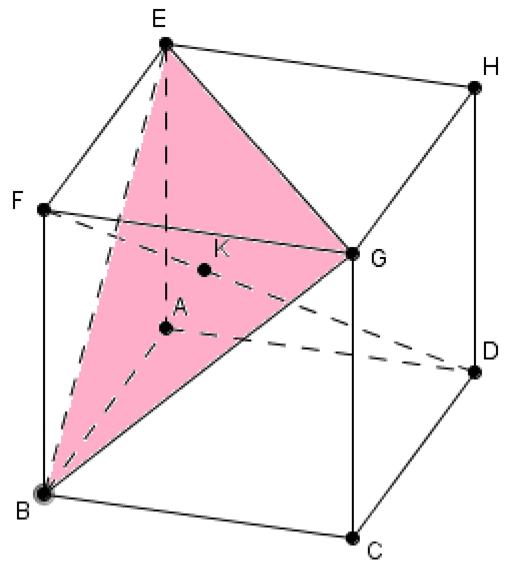
Alors que 79,1% de la population du comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des 11 années précédentes, seules 339 d'entre elles étaient d'origine mexicaine.

Lors du procès, un statisticien produisit des arguments pour convaincre la Cour Suprême du bien fondé de la requête de l'accusé (dont les juges votèrent à 5 contre 4 en faveur de la requête).

En vous situant dans le rôle de ce statisticien, montrez (en justifiant) que le hasard ne peut pas « raisonnablement » expliquer à lui seul la sous-représentation des américains d'origine mexicaine dans les jurys de ce comté.

Exercice 4 (3 points)

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-contre et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}=(1;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).

3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $\mathrm{K}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.

5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

Exercice 5 ***Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*** **(5 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si une des affirmations est fausse, donner la bonne réponse.

1. Soit z un nombre complexe d'argument θ. Alors $\arg\left(\dfrac{i}{\left(\overline{z}\right)}\right)=\pi+\theta+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$.

2. Un argument de $z=-6ie^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ est égal à $\dfrac{\pi}{8}$.

3. $z=\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}$ est réel.

4. Soit $z=-2\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ et $z'=\dfrac{i}{2}\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$. Un argument de $z\times z'$ est égal à 0.

Partie B

1. Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation $z^2-8z+25=0$

2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=4+3i$ et $z_{\mathrm{B}}=1+7i$.

a. Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

b. Interpréter géométriquement le résultat obtenu, et en déduire la nature du triangle OAB.

3. Soit I le milieu de $[\mathrm{OB}]$. On désigne par C le symétrique de A par rapport à I.
Quelle est l'affixe du point C ? Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère OABC ?

Exercice 5 ***Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*** **(5 points)**

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n°1, alors il ira, soit sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°2, alors, soit il ira sur la page n°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°3, alors, soit il ira sur la page n°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel *n*, on définit les évènements et les probabilités suivants :

A_n : « Après la *n*-ième navigation, l'internaute est sur la page n°1 » et on note $a_n = p(A_n)$

B_n : « Après la *n*-ième navigation, l'internaute est sur la page n°2 » et on note $b_n = p(B_n)$

C_n : « Après la *n*-ième navigation, l'internaute est sur la page n°3 » et on note $c_n = p(C_n)$

1. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}$.

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$; U_0 représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = MU_n$ où *M* est une matrice 3×3 que l'on précisera.

En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $U_n = M^n U_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

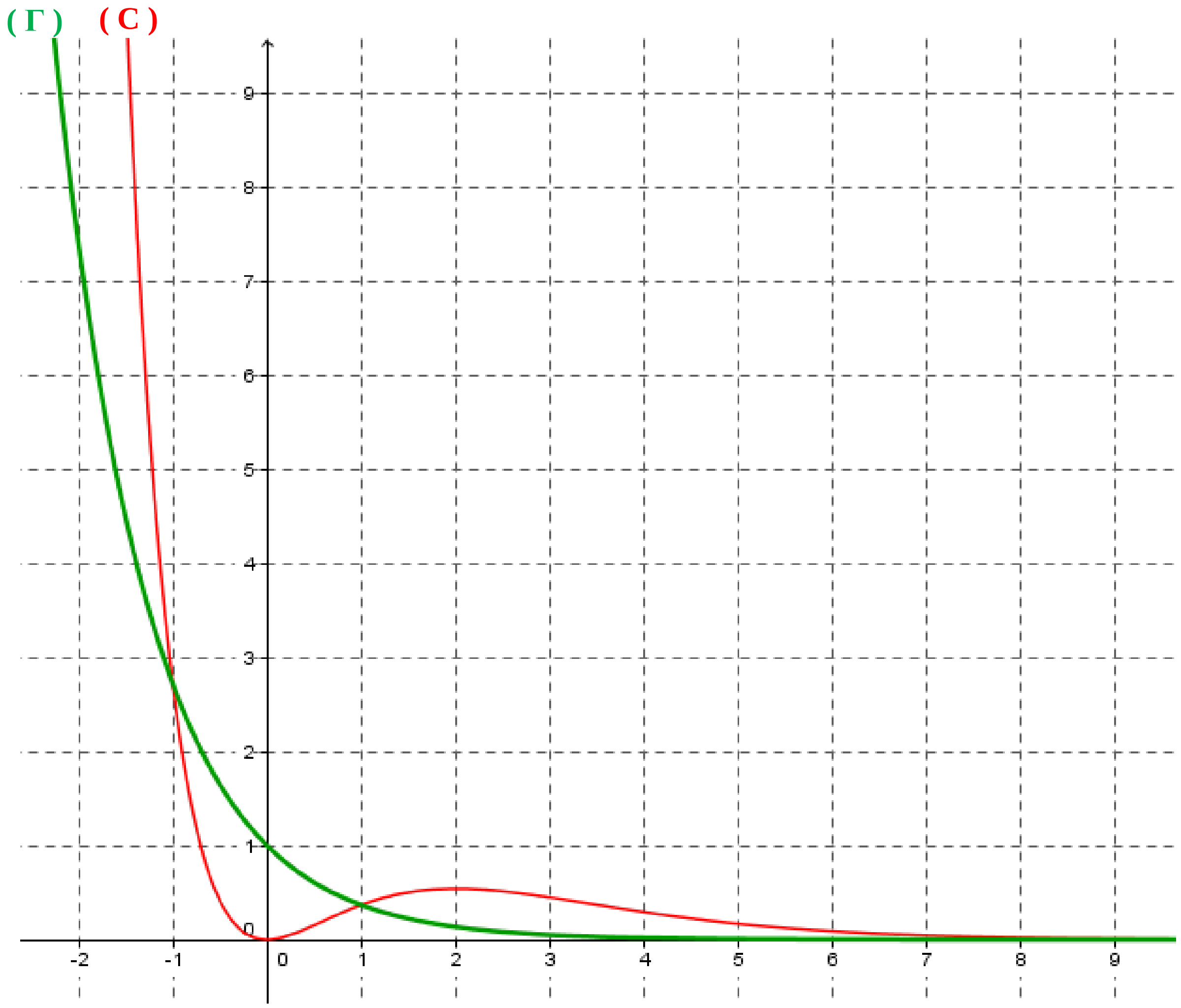
4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel *n* non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de *n* et de a_0, b_0 et c_0.

En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

5. Donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

Annexe de l'exercice 2



Correction du bac blanc n°5

Exercice 1

Partie A

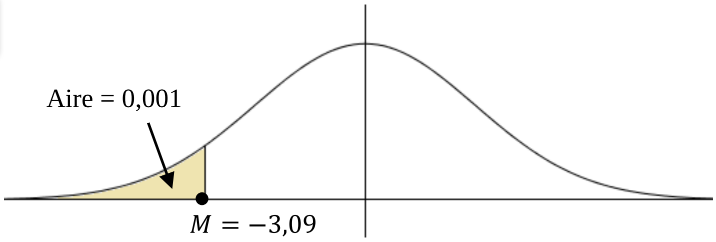
1. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, 2^2)$, on veut que $p(X \leq 100) \leq 0{,}001 \underset{\text{Centrage et réduction}}{\Leftrightarrow} p\left(\dfrac{X-\mu}{2} \leq \dfrac{100-\mu}{2}\right) \leq 0{,}001$

ce qui équivaut en posant $m = \dfrac{100-\mu}{2}$ à $p(Z \leq m) \leq 0{,}001$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

On obtient par inversion de loi normale pour $p(Z \leq M) = 0{,}001$ la valeur $M = -3{,}09$ et donc

la condition $p(Z \leq m) \leq 0{,}001$ sera vérifiée dès lors que $m \leq -3{,}09 \Leftrightarrow \dfrac{100-\mu}{2} \leq -3{,}09$

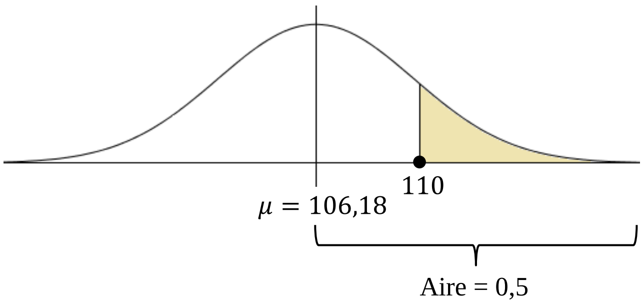
$\Leftrightarrow 100 + 2 \times 3{,}09 \leq \mu \Leftrightarrow \boxed{106{,}18 \leq \mu}$



2. On prend $\mu = 106{,}18$, la probabilité que la bouteille déborde est égale $p(110 < X)$

(le remplissage dépasse la contenance maximale de la bouteille).

On a alors $p(110 < X) = 0{,}5 - p(106{,}18 \leq X \leq 110) \simeq \boxed{0{,}028}$ soit à peu près 3 chances sur 100 pour que la bouteille déborde.



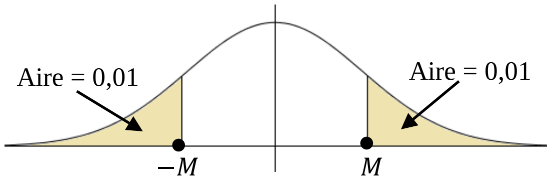
3. On veut que $p(110 < X) \leq 0{,}01 \underset{\text{Centrage et réduction}}{\Leftrightarrow} p\left(\dfrac{110-\mu}{2} < \dfrac{X-\mu}{2}\right) \leq 0{,}01$ ce qui équivaut en posant $m = \dfrac{110-\mu}{2}$ à

$p(m < Z) \leq 0{,}01$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

On obtient par inversion de loi normale pour $p(M < Z) = 0{,}01 = p(Z < -M)$ la valeur $-M \simeq -2{,}32 \Leftrightarrow M \simeq 2{,}32$

et donc la condition $p(m < Z) \leq 0{,}01$ sera vérifiée dès lors que $2{,}32 \leq m$

$\underset{m = \frac{110-\mu}{2}}{\Leftrightarrow} 2{,}32 \leq \dfrac{110-\mu}{2} \Leftrightarrow \underbrace{4{,}64 - 110}_{-105{,}36} \leq -\mu \underset{\times -1 < 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\mu \leq 105{,}36}$



4. Les conditions $106{,}18 \leq \mu$ et $\mu \leq 105{,}36$ sont incompatibles,

$\boxed{\text{il est impossible de les réaliser simultanément}}$

Partie B

1. a. On sait que si Y suit la loi exponentielle de paramètre λ alors $E(Y)=\frac{1}{\lambda}$ et on a ici $\frac{1}{\lambda}=30$

d'où $\boxed{\lambda=\frac{1}{30}}$

b. On a $p(10\leq Y\leq 40)=\int_{10}^{40}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_{10}^{40}\underset{\lambda=\frac{1}{30}}{=}-e^{-\left(\frac{4}{3}\right)}+e^{-\left(\frac{1}{3}\right)}\simeq\boxed{0,453}$

c. On a $p(15\leq Y)\underset{p(t\leq Y)=e^{-\lambda t}}{=}e^{-15\lambda}\underset{\lambda=\frac{1}{30}}{=}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)}\simeq\boxed{0,606}$

2. a. $\boxed{Z \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 1000 \text{ et } p = e^{-\left(\frac{1}{2}\right)}}$

(probabilité d'un succès = probabilité d'avoir une durée de vie supérieure à 15 ans obtenue à la question précédente)

b. F peut être interprétée comme la fréquence de l'événement « la machine a une durée de vie supérieure à 15 ans » calculée sur un échantillon de taille 1000.

c. L'intervalle de fluctuation au seuil de 99 % pour F est par le cours :

$$I=\left[e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}-2,58\frac{\sqrt{e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(1-e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)}}{\sqrt{1000}}\;;\;e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}+2,58\frac{\sqrt{e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(1-e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)}}{\sqrt{1000}}\right]\simeq\boxed{[0,566\,;0,646]}$$

(On peut l'utiliser ici dans la mesure où $n=1000\geq 30$; $np=1000\times e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\simeq 606\geq 5$

et $n(1-p)=1000\times\left(1-e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)\simeq 393\geq 5$)

d. La fréquence de l'événement « la machine a une durée de vie supérieure à 15 ans » calculée sur l'échantillon statistique observé est $\frac{540}{1000}=0,54$ qui n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation précédent.

On peut donc affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 1% que la probabilité de l'événement « la machine a une durée de vie supérieure à 15 ans » n'est pas égale à 0,606 et que par conséquent le paramètre λ utilisé n'est pas le bon.

On peut donc affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 1% que la durée de vie moyenne fournie par le constructeur n'est pas la bonne.

e. On a vu à l'étude précédente que la durée moyenne de vie fournie par le constructeur n'est certainement pas la bonne, ce qui revient à dire qu'en l'état le paramètre λ de la loi exponentielle qui modélise la durée de vie de la machine n'est pas connue.

L'étude précédente permet de réaliser une estimation de la probabilité *p* qu'un appareil ait une durée de vie supérieure à 15 ans par intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.

On sait que $p \in \left[0{,}54 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} ; 0{,}54 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right] \simeq [0{,}508 ; 0{,}572]$ avec une probabilité supérieure à 0,95.

(Les conditions $n = 1000 \geq 30$; $nf = 1000 \times \dfrac{540}{1000} = 540 \geq 5$ et $n(1-f) = 460 \geq 5$ sont vérifiées)

Or, $p = p(Y \geq 15) = \mathrm{e}^{-15\lambda}$ donc : $0{,}508 \leq \mathrm{e}^{-15\lambda} \leq 0{,}572 \underset{\substack{\ln \text{ est croissante} \\ \text{sur }]0\,;+\infty[}}{\Rightarrow} \ln(0{,}508) \leq -15\lambda \leq \ln(0{,}572)$

$$\underset{\div -15<0}{\Rightarrow} -\frac{\ln(0{,}508)}{15} \geq \lambda \geq -\frac{\ln(0{,}572)}{15} \underset{inversion}{\Rightarrow} \underbrace{-\frac{15}{\ln(0{,}508)}}_{\simeq 22{,}1} \leq \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{Durée de vie moyenne}} \leq \underbrace{-\frac{15}{\ln(0{,}572)}}_{\simeq 26{,}8}$$

La durée de vie moyenne de la machine est donc comprise entre 22 et 27 ans avec plus de 95% de chances.

Exercice 2

Partie A

1. Comme *f* est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable, la fonction $F : x \to \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x = 2$ par le théorème fondamental de l'intégration.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$. De plus, *f* est positive sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle admet 0 pour minimum d'après son tableau de variations, on en déduit que *F* est croissante sur $\mathbb{R}$

2. $F(3) = \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$, or $\forall t \in [2;3] \subset [2;+\infty[,\ 0 \leq f(t) \leq 4\mathrm{e}^{-2}$ d'après le tableau de variations de *f*.

On en déduit par croissance de l'intégrale que $\underbrace{\int_2^3 0\,\mathrm{d}t}_{=0} \leq \underbrace{\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t}_{=F(3)} \leq \underbrace{\int_2^3 4\mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{d}t}_{\substack{=4\mathrm{e}^{-2}\int_2^3 1\,\mathrm{d}t \\ =4\mathrm{e}^{-2}(3-2)=4\mathrm{e}^{-2}}} \Rightarrow \boxed{0 \leq F(3) \leq 4\mathrm{e}^{-2}}$

Partie B

1. a. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel *x* :

$f'(x) = \underbrace{2x\mathrm{e}^{-x} + x^2(-\mathrm{e}^{-x})}_{u'v+uv'} = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$; e^{-x} est toujours strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $(2x - x^2) = x(2-x)$.

$x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

b. Signe de $f(x)-g(x)=x^2e^{-x}-e^{-x}=\left(x^2-1\right)e^{-x}$ qui est du signe de $\left(x^2-1\right)$.

$\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ d'où le tableau de signes de $f(x)-g(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative	(C) au-dessus de (Γ)			(C) en dessous de (Γ)		(C) au-dessus de (Γ)	

2. a. H est dérivable comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel x :

$$H'(x)=\underbrace{(-2x-2)e^{-x}+\left(-x^2-2x-1\right)\left(-e^{-x}\right)}_{u'v+uv'}=\left(-2x-2+x^2+2x+1\right)e^{-x}=\left(x^2-1\right)e^{-x}=h(x).$$

Donc H est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h: x \to \left(x^2-1\right)e^{-x}$

b. Comme (C) au-dessus de (Γ) sur $[1;\alpha]$ (voir **Partie B 1.b.**) alors :

$$A(\alpha)=\int_1^\alpha \underbrace{f(x)-g(x)}_{\substack{\text{La plus haute – la plus basse}\\ \text{sur } [1;\alpha]}}\,dx=\int_1^\alpha \left(x^2e^{-x}-e^{-x}\right)dx=\int_1^\alpha \underbrace{\left(x^2-1\right)e^{-x}}_{=h(x)}dx$$

$$\underset{\substack{\text{Question}\\ \text{Précédente}}}{=}\left[H(x)\right]_1^\alpha=H(\alpha)-H(1) \Rightarrow \boxed{A(\alpha)=\left(-\alpha^2-2\alpha-1\right)e^{-\alpha}+4e^{-1}}$$

c. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} H(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(-\alpha^2-2\alpha-1\right)e^{-\alpha}$ (F.I. $-\infty\times 0$ mais prédominance de l'exponentielle sur le polynôme) donc $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)+4e^{-1}=4e^{-1}}$

Exercice 3

Partie A

1. Voir cours

On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n=870$ et $p=0,791$ ainsi que la variable aléatoire $F=\dfrac{X}{870}$.

2. a. Soit $\alpha\in\left]0;1\right[$. L'intervalle I_α de fluctuation asymptotique de F au seuil $1-\alpha$ est :

$I_\alpha=\left[p-\mu_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+\mu_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où μ_α est l'unique réel strictement positif tel que $p\left(-\mu_\alpha\le Z\le\mu_\alpha\right)=1-\alpha$ avec Z suivant la loi normale centrée réduite.

Or $n=870$ et $p=0,791$, on a donc $\boxed{I_\alpha=\left[0,791-0,014\mu_\alpha\,;\,0,791+0,014\mu_\alpha\right] \text{ arrondi à } 10^{-3}}$

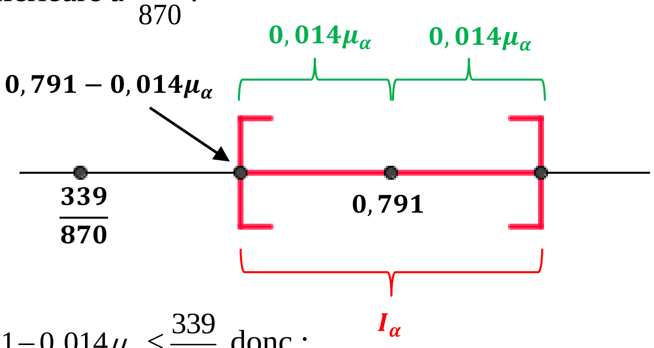
(Les conditions d'utilisations de cet intervalle $n=870\ge 30$; $np=870\times 0,791\simeq 688\ge 5$ et $n(1-p)=870\times 0,791\simeq 182\ge 5$ sont bien vérifiées)

b. $\boxed{\text{Diminuer } \alpha \text{ augmente le seuil } 1-\alpha \text{ et augmente par conséquent l'amplitude de } I_\alpha}$

3. a. Déjà $\dfrac{339}{870} \simeq 0{,}39$ est situé sur l'axe réel à gauche du centre $0{,}791$ de I_α.

Donc $\dfrac{339}{870} \in I_\alpha$ si la borne de gauche de I_α est inférieure à $\dfrac{339}{870}$.

$\boxed{\text{Finalement, } \dfrac{339}{870} \in I_\alpha \text{ si } 0{,}791 - 0{,}014\mu_\alpha \le \dfrac{339}{870}}$



b. D'après la question précédente, $\dfrac{339}{870} \in I_\alpha$ si $0{,}791 - 0{,}014\mu_\alpha \le \dfrac{339}{870}$ donc :

$\dfrac{339}{870} \in I_\alpha$ si $\dfrac{\left(0{,}791 - \dfrac{339}{870}\right)}{0{,}014} \le \mu_\alpha$ ce qui fournit en arrondissant à 10^{-3} près : $\boxed{\dfrac{339}{870} \in I_\alpha \text{ si } 28{,}668 \le \mu_\alpha}$

c. Par définition de μ_α : $p(-\mu_\alpha \le Z \le \mu_\alpha) = 1 - \alpha$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)$

La calculatrice renvoie pour $\mu_\alpha = 28$: $p(-28 \le Z \le 28) = 1$ et donc $1 - \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

(D'après la remarque fournie par l'énoncé, on a en réalité $\alpha \simeq 10^{-170} = \underbrace{0{,}00...01}_{169 \text{ zéros}}$)

Partie B

Prenons pour hypothèse que les 870 membres du jury ont toujours été choisis au cours des 11 années de manière aléatoire et indépendante dans le comté et appelons X la variable aléatoire qui décompte le nombre de jurés d'origine mexicaine parmi ces 870 membres.

X suivrait alors une loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $\underbrace{p = 0{,}791}_{\text{probabilité qu'une personne soit mexicaine dans le comté}}$ et d'après les calculs

effectués dans la **partie A** : $F = \dfrac{X}{870} \in I_{10^{-170}} = [0{,}791 - 0{,}014 \times 28\,; 0{,}791 + 0{,}014 \times 28\,] = [0{,}399\,; 1{,}183]$

avec une probabilité supérieure $1 - 10^{-170}$ (égal à 1 pour tout calculateur standard)

Or dans le cas qui nous intéresse, il y avait $X = 339$ jurés sur 870 d'origine mexicaine choisis au cours des 11 années, ce qui donne une fréquence $F = \dfrac{339}{870} < 0{,}39$ qui n'appartient pas à $I_{10^{-170}}$.

On peut donc rejeter l'hypothèse que les membres du jury avaient été choisis au hasard avec un risque d'erreur inférieur à 10^{-170} (un risque d'erreur de l'ordre du milliard de milliards ... de milliards (dire en tout 18 fois « de milliards ») de fois moins important que la probabilité de gagner au loto…)

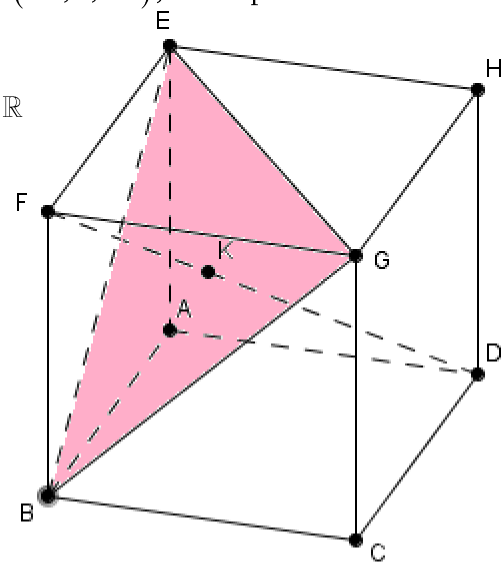
Autant parler de certitude… Les membres du jury n'ont, de manière certaine, pas été choisis au hasard et un violeur et voleur a été relâché… Triste conclusion…

Exercice 4

Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé, ce qui légitime les calculs de distances et de produit scalaire.

1. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a $F(1;0;1)$ et $D(0;1;0)$.

Un vecteur directeur de (FD) étant $\overrightarrow{FD}(x_D-x_F\,;y_D-y_F\,;z_D-z_F)=(-1;1;-1)$, une représentation paramétrique de (FD) est égale à : $\begin{cases} x=x_F+t\,x_{\overrightarrow{FD}} \\ y=y_F+t\,y_{\overrightarrow{FD}} \\ z=z_F+t\,z_{\overrightarrow{FD}} \end{cases} = \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}\ ;\ t\in\mathbb{R}$



2. On a $\vec{n}=(1;-1;1)$; $\overrightarrow{BG}=(0;1;1)$ et $\overrightarrow{BE}=(-1;0;1)$

Donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=1\times0+(-1)\times1+1\times1=0$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times(-1)+(-1)\times0+1\times1=0$.

Comme $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{n}$ est normal au plan (BGE) puisqu'il est orthogonal à deux directions vectorielles non colinéaires définissant ce plan.

On a donc $(BGE): x_{\vec{n}}x+y_{\vec{n}}y+z_{\vec{n}}z+d=0 \Leftrightarrow (BGE): x-y+z+d=0$ et comme ce plan passe par exemple par $G(1;1;1)$, on tire $x_G-y_G+z_G+d=0 \Leftrightarrow 1-1+1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$.

$\boxed{\text{D'où } (BGE): x-y+z-1=0}$

3. On a $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$ et puisque $\vec{n}=(1;-1;1)=-1\,\overrightarrow{FD}$, alors $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires.

Il s'en suit que (BGE) et (FD) sont perpendiculaires puisqu'un vecteur normal $\vec{n}$ à (BGE) est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{FD}$ de la droite (FD).

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection entre (FD) et (BGE), injectons le système d'équations paramétriques définissant (FD) dans l'équation cartésienne de (BGE).

On obtient $(1-t)-t+(1-t)-1=0 \Leftrightarrow 3t=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ que nous réinjectons dans le système d'équations paramétriques définissant (FD) pour obtenir $x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\boxed{\text{Ainsi, } (FD) \text{ et } (BGE) \text{ sont perpendiculaires en un point K de coordonnées } K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)}$

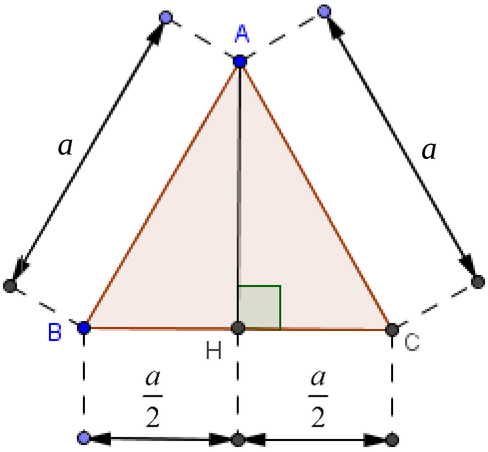
4. $BE=\left\|\overrightarrow{BE}\right\|=\left\|(-1;0;1)\right\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$; $BG=\left\|\overrightarrow{BG}\right\|=\left\|(0;1;1)\right\|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

et $EG=\left\|\overrightarrow{EG}\right\|=\left\|(1;1;0)\right\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Il s'en suit que BEG est un triangle équilatéral de côté } a=\sqrt{2}}$

L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à : $\dfrac{\overset{=a}{\mathrm{BC}}\times \mathrm{AH}}{2}$

(Voir ci-contre) et d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle ABH rectangle en H, on déduit que :



$$(\mathrm{AH})^2+\underbrace{(\mathrm{BH})^2}_{=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}}=\underbrace{(\mathrm{AB})^2}_{=a^2}\Rightarrow(\mathrm{AH})^2=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow \mathrm{AH}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

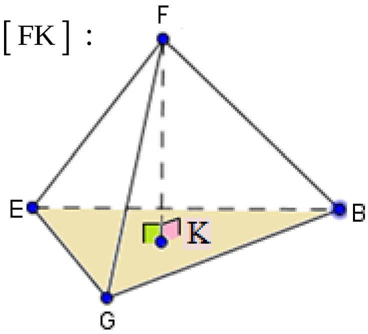
On en déduit l'aire d'un triangle équilétéral de côté a : $\dfrac{\overset{=a}{\mathrm{BC}}\times \overset{=\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\mathrm{AH}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Comme dans le contexte de cette question, le triangle BEG est équilatéral de côté $a=\sqrt{2}$, son aire est donc égale à $\boxed{\mathrm{Aire}(\mathrm{BEG})=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

5. Déjà, $\mathrm{F}(1;0;1)$ et $\mathrm{K}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ donc $\mathrm{KF}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{KF}}\right\|=\left\|\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Dans le tétraèdre BEGD, en prenant pour base le triangle BEG et pour hauteur $[\mathrm{FK}]$:

(On a vu en **3.** que $\mathrm{K}\in(\mathrm{BGE})$ et que (FK) et (BGE) sont perpendiculaires)



$$\boxed{\text{le volume du tétraèdre BEGD est égal à } V=\frac{1}{3}\underbrace{\mathrm{Aire}(\mathrm{BEG})}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ par la question précédente}}\times\underbrace{\mathrm{FK}}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{6}}$$

Exercice 5 ***Pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité***

Partie A

1. $\arg\left(\dfrac{i}{\left(\overline{z}\right)}\right)=\arg(i)-\underbrace{\arg\left(\overline{z}\right)}_{=-\arg(z)}=\dfrac{\pi}{2}+\underbrace{\arg(z)}_{=\theta}=\boxed{\dfrac{\pi}{2}+\theta+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}}$ **Faux**

2. $|-6|=6$ et $\arg(-6)=\pi+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow -6=6\mathrm{e}^{i\pi}$ sous forme exponentielle

$|i|=1$ et $\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow i=1\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ sous forme exponentielle

Donc $z=-6i\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}=6\mathrm{e}^{i\pi}\times\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\times\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}=6\mathrm{e}^{i\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}=\underbrace{6}_{\in\mathbb{R}_+^*}\mathrm{e}^{i\left(\frac{13}{8}\pi\right)}\Rightarrow\boxed{\arg(z)=\dfrac{13\pi}{8}\neq\dfrac{\pi}{8}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}}$ **Faux**

3. $z=\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}=\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)+\left(\cos(\theta)-i\sin(\theta)\right)=\boxed{2\cos(\theta)\in\mathbb{R}}$ **Vrai**

4. $z\times z'=-2\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\times\dfrac{i}{2}\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=-i\mathrm{e}^{i\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=-i\underbrace{\mathrm{e}^{i0}}_{=1}=-i$

$\Rightarrow\boxed{\arg(z\times z')=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}\neq 0+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}}$ **Faux**

Partie B

1. $z^2-8z+25=0$. $\Delta=(-8)^2-4\times25\times1=-36<0$, il existe par conséquent deux racines complexes et conjuguées : $\boxed{z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-8)+i\sqrt{36}}{2}=4+3i \text{ et } z_2=\overline{z_1}=4-3i}$

2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=4+3i$ et $z_{\mathrm{B}}=1+7i$.

a. $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}=\dfrac{4+3i}{4+3i-(1+7i)}=\dfrac{4+3i}{3-4i}=\dfrac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{12+16i+9i-12}{3^2+4^2}=\dfrac{25i}{25}=i$. $\boxed{\text{Donc } \dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}=i}$

b. Interprétation du module :

$$\left|\frac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}\right|\underset{z_{\mathrm{O}}=0}{=}\left|\frac{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}\right|=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{BA}}=|\,i\,|=1\Rightarrow\boxed{\mathrm{OA}=\mathrm{BA}}$$

Interprétation de l'argument :

$$\arg\left(\frac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}\right)\underset{z_{\mathrm{O}}=0}{=}\arg\left(\frac{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}}$$

Des deux encadrés précédents, on déduit que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A

3. Déjà I est le milieu de $[\mathrm{OB}]$ donc $z_{\mathrm{I}}=\dfrac{z_{\mathrm{O}}+z_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{0+1+7i}{2}=0{,}5+3{,}5i$

C est le symétrique de A par rapport à I donc I est le milieu de $[\mathrm{AC}]$,

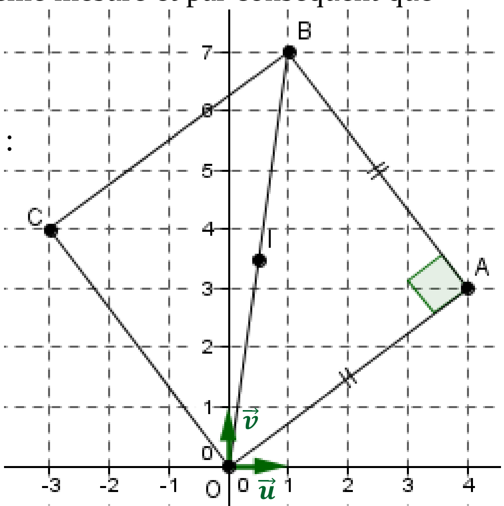
on a alors $z_{\mathrm{I}}=\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{C}}}{2}\Rightarrow z_{\mathrm{C}}=2z_{\mathrm{I}}-z_{\mathrm{A}}=2(0{,}5+3{,}5i)-(4+3i)\Rightarrow\boxed{z_{\mathrm{C}}=-3+4i}$

Ensuite I est le milieu de $[\mathrm{AC}]$ et I est le milieu de $[\mathrm{OB}]$ donc les diagonales du quadrilatère AOBC ont le même milieu et par suite **OABC est un parallélogramme**.

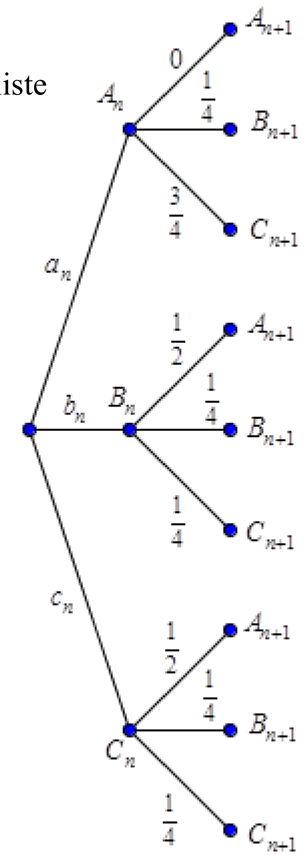
Ensuite, d'après **2.** : OA = AB , donc deux côtés consécutifs du parallélogramme OABC ont même mesure. On en déduit que tous les côtés de OABC ont même mesure et par conséquent que **OABC est un losange**.

Finalement, d'après **2.** , l'angle $\widehat{\mathrm{OAB}}$ est droit d'où OABC est un losange possédant un angle droit et en conclusion :

OABC est un carré



Exercice 5 ***Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***



1. Les données fournies par l'énoncé permettent de monter l'arbre probabiliste ci-contre. Ensuite, comme $\{A_n ; B_n ; C_n\}$ forment un système complet d'événements et on a donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{cases} \overbrace{p(A_{n+1})}^{=a_{n+1}} = \overbrace{p_{A_n}(A_{n+1})}^{=0} \times \overbrace{p(A_n)}^{=a_n} + \overbrace{p_{B_n}(A_{n+1})}^{=\frac{1}{2}} \times \overbrace{p(B_n)}^{=b_n} + \overbrace{p_{C_n}(A_{n+1})}^{=\frac{1}{2}} \times \overbrace{p(C_n)}^{=c_n} \\ \overbrace{p(B_{n+1})}^{=b_{n+1}} = \overbrace{p_{A_n}(B_{n+1})}^{=\frac{1}{4}} \times \overbrace{p(A_n)}^{=a_n} + \overbrace{p_{B_n}(B_{n+1})}^{=\frac{1}{4}} \times \overbrace{p(B_n)}^{=b_n} + \overbrace{p_{C_n}(B_{n+1})}^{=\frac{1}{4}} \times \overbrace{p(C_n)}^{=c_n} \\ \overbrace{p(C_{n+1})}^{=c_{n+1}} = \overbrace{p_{A_n}(C_{n+1})}^{=\frac{3}{4}} \times \overbrace{p(A_n)}^{=a_n} + \overbrace{p_{B_n}(C_{n+1})}^{=\frac{1}{4}} \times \overbrace{p(B_n)}^{=b_n} + \overbrace{p_{C_n}(C_{n+1})}^{=\frac{1}{4}} \times \overbrace{p(C_n)}^{=c_n} \end{cases}$$

Ce qui fournit bien le système : $\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}}$

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$; U_0 représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

En écrivant le système précédent sous forme matricielle, on obtient : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

d'où $U_{n+1} = MU_n$ avec $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $U_n = M^n U_0$:

Amorce : $M^0 = I_3 \Rightarrow M^0 \times U_0 = I_3 \times U_0 = U_0$. La relation est par conséquent vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un certain rang *n*, $U_n = M^n U_0$ et montrons que $U_{n+1} = M^{n+1} U_0$.
Partons de $U_n = M^n U_0$ et multiplions chaque membre de cette égalité par *M* à gauche, on tire : $M \times U_n = M^{n+1} U_0$ et comme on a $U_{n+1} = MU_n$, on a alors bien $U_{n+1} = M^{n+1} U_0$.

Conclusion : $\boxed{\text{On a montré par récurrence que pour tout entier naturel } n,\ U_n = M^n U_0}$

3. Soit une matrice colonne $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ telle que : $x+y+z=1$ et vérifiant $MU=U$.

$$MU=U \Leftrightarrow MU-U=0 \Leftrightarrow (M-I_3)U=0 \Leftrightarrow (S):\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\ \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}z=0\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z=0\end{cases}.$$

(En effet : $(M-I_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$)

Seul problème : la matrice $(M-I_3)$ n'est pas inversible.

La technique consiste donc à remplacer la première ligne du système (S) par la relation imposée $x+y+z=1$ pour obtenir le système $(S'):\begin{cases}x+y+z=1\\ \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}z=0\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}z=0\end{cases} \Leftrightarrow M'U=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ où $M'=\begin{pmatrix}1&1&1\\ \frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

La matrice M' est bien inversible et on déduit :

$$M'U=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \underset{\times M'^{-1}\text{ à gauche}}{\Rightarrow} \underbrace{M'^{-1}M'}_{=I_3}U=M'^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow U=M'^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\underset{\text{Calculatrice}}{=}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}\end{pmatrix}.$$

Reste à vérifier que la matrice colonne $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}\end{pmatrix}$ (qui vérifie bien $x+y+z=1$) vérifie aussi la relation $MU=U$ ce que la calculatrice valide immédiatement.

L'unique matrice colonne $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ telle que : $x+y+z=1$ et vérifiant $MU=U$ est $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}\end{pmatrix}$

4. $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}}_{=M^nU_0}$ d'où le système :

$$\begin{cases} a_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)a_0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)b_0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)c_0\\ b_n=\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{4}b_0+\frac{1}{4}c_0\\ c_n=\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n a_0+\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)b_0+\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)c_0\end{cases}$$

ce qui fournit les expressions demandées.

Comme ensuite $-1<\left(\frac{-1}{2}\right)<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=0$ et on en déduit que :

$$\boxed{\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\left(\frac{1}{3}\right)a_0+\left(\frac{1}{3}\right)b_0+\left(\frac{1}{3}\right)c_0=\frac{1}{3}\underbrace{(a_0+b_0+c_0)}_{=1}=\frac{1}{3}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\left(\frac{1}{4}\right)a_0+\left(\frac{1}{4}\right)b_0+\left(\frac{1}{4}\right)c_0=\frac{1}{4}\underbrace{(a_0+b_0+c_0)}_{=1}=\frac{1}{4}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\left(\frac{5}{12}\right)a_0+\left(\frac{5}{12}\right)b_0+\left(\frac{5}{12}\right)c_0=\frac{5}{12}\underbrace{(a_0+b_0+c_0)}_{=1}=\frac{5}{12}\end{cases}}$$

5. On déduit des résultats précédents qu'à long terme, la page 1 sera visitée avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, la page 2 sera visitée avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et la page 3 sera visitée avec une probabilité de $\frac{5}{12}$,

soit environ 33% , 25% et 42% de visites pour respectivement les pages 1, 2 et 3 à long terme.

Grille de correction bac blanc n°5

	Barème	Points élèves		Barème	Points élèves
Exercice 1	**16 points**		**Exercice 4**	**12 points**	
A. 1.	3		1.	2	
2.	1		2.	3	
3.	2		3.	3	
4.	1		4.	2	
B. 1. a.	1		5.	2	
b.	1		**Exercice 5**	**20 points**	**Non Spé**
c.	1		A. 1.	2	
2. a.	1		2.	2	
b.	1		3.	2	
c.	2		4.	2	
d.	1		B. 1.	2	
e.	1		2. a.	2	
Exercice 2	**20 points**		b.	5	
A. 1.	2		3.	3	
2.	3		**Exercice 4**	**20 points**	**Spé**
B. 1. a.	4		1.	4	
b.	3		2.	4	
2. a.	2		3.	6	
b.	4		4.	4	
c.	2		5.	2	
Exercice 3	**12 points**		**Total/ 80 :**		
A. 1.	2				
2. a.	1				
b.	1				
3. a.	2				
b.	2				
c.	1				
B.	3				