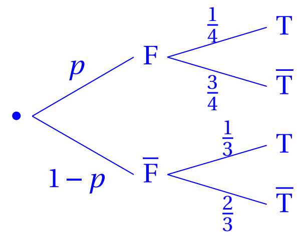
Ex 1 : (5 points) *Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que* 30 % *des membres de cette association adhèrent à la section tennis.*

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

– F *l'évènement « le membre choisi est une femme »,*
– T *l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».*

1. **a.** *Montrer que la probabilité de l'évènement* F *est égale à* $\frac{2}{5}$.

Notons p la probabilité que le membre choisi au hasard soit une femme.
L'arbre de probabilités correspondant à la situation est :



$T=(T\cap F)\cup(T\cap\overline{F})$.
C'est une réunion d'événements incompatibles, donc :
$p(T)=p(T\cap F))+p(T\cap\overline{F})=p_F(T)\,p(F)+p_{\overline{F}}(T)\,p(\overline{F})$.
$p(T)=p\times\frac{1}{4}+(1-p)\times\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)p+\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}p+\frac{1}{3}$

On sait que $p(T)=30\%=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$. On en déduit : $-\frac{1}{12}p+\frac{1}{3}=\frac{3}{10}\iff\frac{p}{12}=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$ d'où $p=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$.

La probabilité de l'événement F est : $\boxed{p(F)=\frac{2}{5}}$

b. *On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.*
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

$p_T(F)=\frac{p(F\cap T)}{p(T)}=\frac{\frac{p}{4}}{\frac{3}{10}}=\frac{10p}{3\times4}=\frac{5p}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\boxed{p_T(F)=\frac{1}{3}}$

2. *Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.*
On utilise une urne contenant 100 *jetons ;*
10 *jetons exactement sont gagnants et rapportent* 20 *euros chacun, les autres ne rapportent rien.*
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € *puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors* 20 *euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.*

On note X *la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des* 5 €*) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.*

a. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire* X.

Le nombre de tirages possibles de deux jetons est $\binom{100}{2}=4\,950$.
X peut prendre les valeurs 35 (deux jetons gagnants), 15 (un seul jeton gagnant) et -5 (deux jetons perdants).

$p(X=-5)=\frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}}=\frac{4\,005}{4\,950}=\frac{89}{110}$ $\qquad p(X=35)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}}=\frac{45}{4\,950}=\frac{1}{110}$

$p(X=15)=1-\big(p(X=0)+p(X=2)\big)=1-\left(\frac{1}{110}+\frac{89}{110}\right)=1-\frac{90}{110}=\frac{20}{110}=\frac{2}{11}$.

La loi de probabilité de X est donc :

X	-5	15	35
$p\,(X=x_i)$	$\frac{89}{110}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{110}$

b. *Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire* X *et interpréter le résultat obtenu.*

L'espérance est $E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\,p\,(X=x_i)=-5\times\frac{89}{110}+15\times\frac{2}{11}+35\frac{1}{110}=-\frac{110}{110}=-1$. $\boxed{E(X)=-1}$
Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.

Ex 2 : (7 points) *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par* $\begin{cases} u_1 = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$

Pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

1. *Calculer u_2, u_3 et u_4.*

$\boxed{\bullet\ u_2 = \frac{1+1}{2\times 1} u_1 = \frac{1}{2} \qquad \bullet\ u_3 = \frac{2+1}{2\times 2} u_2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \qquad \bullet\ u_4 = \frac{3+1}{2\times 3} u_3 = \frac{4}{6}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{4}}$

2. a. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{n+n}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. Comme $u_n > 0$ on en déduit que $\boxed{u_{n+1} \leqslant u_n}$ la suite (u_n) est décroissante.

b. *Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? (sachant que pour $n \geqslant 1$, u_n est strictement positif)*

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3. *Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \frac{u_n}{n}$.*

a. *Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\cancel{n+1}} \times \frac{\cancel{n+1}}{2n} u_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} u_n = \frac{1}{2} v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \frac{1}{2}$.

b. *En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n}{2^n}$.*

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$, on en déduit, comme $v_n = \frac{u_n}{n}$, que $\boxed{u_n = \frac{n}{2^n}}$

4. a. *Démontrer que pour tout $n \geqslant 5$, on a : $2^n > n^2$.*

Démonstration par récurrence :

– Initialisation : on a $2^5 > 5^2$, soit $32 > 25$ donc la propriété est vraie pour $n = 5$

– Hérédité : supposons qu'il existe $n \geqslant 5$ tel que $2^n > n^2$. *je suppose la proposition vraie au rang n*

Alors

$$2 \times 2^n > 2 \times n^2$$
$$2^{n+1} > 2n^2$$

Comme $n \geqslant 5$, $2n^2 > (n+1)^2$

en effet, $2n^2 > (n+1)^2 \iff n^2 - 2n > 1$
$\iff (n-1)^2 > 2$
$\iff n \geqslant 3$ avec $n \in \mathbb{N}$

Finalement $2^{n+1} > (n+1)^2$. *alors la proposition est vraie au rang $n+1$*

– Conclusion : la proposition est vraie pour $n = 5$, elle est héréditaire

donc par récurrence on a, quel que soit $n \geqslant 5$, $\boxed{2^n > n^2}$

b. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

Pour $n \geqslant 5$, $2^n > n^2 \iff \frac{2^n}{n} > n \iff \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n} \iff u_n < \frac{1}{n}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pour tout entier naturel $0 < u_n < \frac{1}{n}$

donc par comparaison ("théorème des gendarmes") : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Remarque. On aurait pu déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) dès la question **2. b.**
En effet la relation $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ell = \frac{1}{2}\ell$ et donc que $\ell = 0$.

Ex 3 : (8 points) *On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ tels que :*

– *le premier, S_1, contient 3 billes blanches et 2 vertes ;*
– *chacun des suivants, $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ contient 2 billes blanches et 2 vertes.*

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- *on tire au hasard une bille dans S_1 ; on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ; on place la bille tirée de S_2 dans S_3 , puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;*
- *etc. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $P(E_n)$ sa probabilité.*

1. *Mise en évidence d'une relation de récurrence*

   a. *D'après l'énoncé, donner les valeurs de* $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$ *et* $P_{\overline{E_1}}(E_2)$. *En déduire la valeur de* $P(E_2)$.

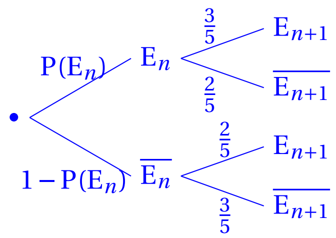
   Chaque tirage se faisant au hasard, on utilise dans chaque cas la loi équirépartie.

   D'après l'énoncé, $\boxed{P(E_1)=\dfrac{2}{5} \quad P_{E_1}(E_2)=\dfrac{3}{5} \quad \text{et} \quad P_{\overline{E_1}}(E_2)=\dfrac{2}{5}}$

   Avec la formule des probabilités totales, $p(E_2)=p(E_1\cap E_2)+p(\overline{E_1}\cap E_2)=p(E_1)\times p_{E_1}(E_2)+p(\overline{E_1})\times P_{\overline{E_1}}(E_2)$

   $\boxed{p(E_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{25}}$

   b. *À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer* $P(E_{n+1})$ *en fonction de* $P(E_n)$.

   $P(E_{n+1})=p(E_n)\times p_{E_n}(E_{n+1})+p(\overline{E_n})\times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

   D'après les conditions des tirages $p_{E_n}(E_{n+1})=\dfrac{3}{5}$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})=\dfrac{2}{5}$

   donc $P(E_{n+1})=p(E_n)\times\dfrac{3}{5}+p(\overline{E_n})\times\dfrac{2}{5}$ soit $\boxed{P(E_{n+1})=\dfrac{1}{5}\times p(E_n)+\dfrac{2}{5}}$

2. *Étude d'une suite - On considère la suite* (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_1=\dfrac{2}{5} \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}\cdot u_n+\dfrac{2}{5} \end{cases}$ $(\star)$ *pour tout* $n\geqslant 1$.

   On a tracé, en annexe 1, la droite Δ *d'équation* $y=x$ *et la droite d'équation* $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{2}{5}$.

   a. *Placer* u_1, u_2 *et* u_3 *sur l'axe des abscisses. Faire apparaître les traits de construction.*

   b. *Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite* (u_n) *?*

   On peut conjecturer que la suite est croissante et convergente vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

3. a. *Démontrer que la suite* (u_n) *est majorée par* $\dfrac{1}{2}$.

   Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $u_n\leqslant\dfrac{1}{2}$

   – Initialisation : au rang $n=1$ on a bien $u_1\leqslant\dfrac{1}{2}$, donc la propriété est vraie pour $n=1$

   – Hérédité : supposons qu'il existe $n\geqslant 1$ tel que $u_n\leqslant\dfrac{1}{2}$. *je suppose la proposition vraie au rang n*

   Alors

   $$\frac{1}{5}\times u_n\leqslant\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$$

   $$\frac{1}{5}\times u_n+\frac{2}{5}\leqslant\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$$

   Finalement $u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$. *alors la proposition est vraie au rang* $n+1$

   – Conclusion : la proposition est vraie pour $n=1$, elle est héréditaire

   donc par récurrence on a, quel que soit $n\geqslant 1$, $\boxed{u_n\leqslant\dfrac{1}{2}}$ la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$

   b. *Démontrer que la suite* (u_n) *est croissante.*

   Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{5}\times u_n+\dfrac{2}{5}-u_n=\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}u_n=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-u_n\right)$.

   D'après la question précédente, la parenthèse est toujours positive donc la différence $u_{n+1}-u_n$ est toujours positive, donc la suite (u_n) est croissante.

   c. *Justifier que la suite* (u_n) *est convergente.*

   La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

   d. *On déduit de la relation* $(\star)$ *que la limite* ℓ *de cette suite est telle que* $\ell=\dfrac{1}{5}\ell+\dfrac{2}{5}$. *Déterminer* ℓ.

   $\boxed{\ell=\dfrac{1}{5}\ell+\dfrac{2}{5}\iff\dfrac{4}{5}\ell=\dfrac{2}{5}\iff\ell=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}}$

4. *À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités* $P(E_n)$.

   Comme $u_1=P(E_1)$ et que la suite (u_n) est définie par la même relation de récurrence que la suite $(P(E_n))$, il s'agit de la même suite. Les probabilités $P(E_n)$ forment donc une suite croissante et convergente vers $\dfrac{1}{2}$.

5. *En conservant toutes les décimales, compléter le tableau donné en annexe 2, à l'aide de votre calculatrice.*

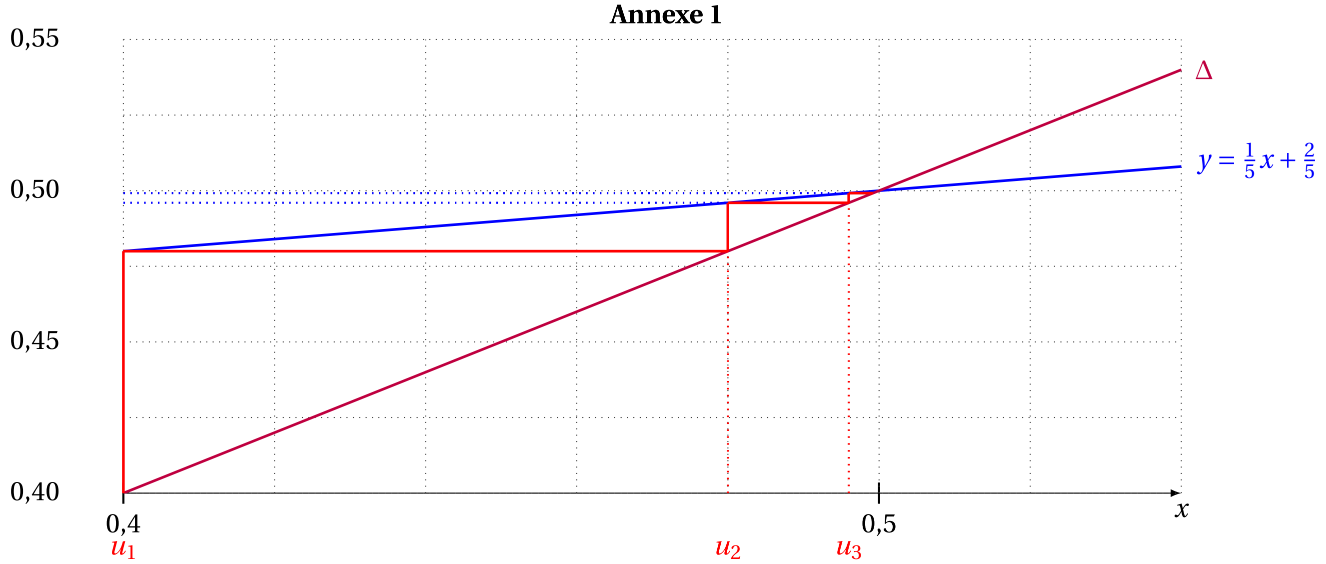
6. *On donne l'algorithme suivant :*
À l'aide du tableau de l'annexe 2,
déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

Pour déterminer quelles valeurs de l'entier n on a $0{,}49999 \leqslant P(En) \leqslant 0{,}5$, on a calculé les premiers termes de la suite à l'aide d'une calculatrice. La première valeur qui convient est $n = 7$ et, comme la suite est croissante et majorée par $0{,}5$, on a $\boxed{0{,}49999 \leqslant P(En) \leqslant 0{,}5 \text{ pour tout } n \geqslant 7}$

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 2/5 à X et 1 à Y
Tant que X < 0,499 99
    Faire
        Affecter 1/5·X + 2/5 à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

NOM :

Annexe 1



Annexe 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	0,4	0,48	0,496	0,499 2	0,499 84	0,499 968	0,499 993 6	0,499 998 72