1 (6 points) *On considère la suite* (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1}$.

On admet *que pour tout entier naturel* n, $u_n > 0$.

1. **a.** *Calculer* u_1, u_2, u_3, u_4. *On pourra en donner une valeur approchée à* 10^{-2} *près.*

$\boxed{u_1 = \dfrac{4}{5} = 0,8 \quad ; \quad u_2 = \dfrac{14}{13} \simeq 1,08 \quad ; \quad u_3 = \dfrac{40}{41} \simeq 0,98 \quad ; \quad u_4 = \dfrac{122}{121} \simeq 1,01}$

b. *Vérifier que si* n *est l'un des entiers* $0, 1, 2, 3, 4$ *alors* $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

On voit bien que $\boxed{u_0 > 1 \quad ; \quad u_1 < 1 \quad ; \quad u_2 > 1 \quad ; \quad u_3 < 1 \quad ; \quad u_4 > 1}$

donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang comme $(-1)^n$: $\begin{cases} \text{si } n \text{ pair c'est } + \\ \text{si } n \text{ impair c'est } - \end{cases}$

c. *Établir que pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n+1}{2u_n+1}$.

$\boxed{u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n+1)}{2u_n+1} = \dfrac{1-u_n}{2u_n+1}}$

d. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel* n, $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

On a admis au début de l'énoncé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (on pourrait le démontrer par récurrence) ; démontrons par récurrence la proposition : « $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$ » :

- Initialisation : on a $u_0 = 2$, donc $u_0 - 1 > 0$ du même signe que $(-1)^0 = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$
- Hérédité : supposons qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que :

  $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$. *je suppose la proposition vraie au rang n*

  Alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$
  et $(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les termes u_n sont strictement positifs,

  donc la fraction $\dfrac{1-u_n}{2u_n+1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$

  finalement $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$. *alors la proposition est vraie au rang* $n+1$
- Conclusion : la proposition est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire

  donc par récurrence on a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(u_n - 1) \text{ a le même signe que } (-1)^n}$

2. *Pour tout entier naturel* n, *on pose* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. *Établir que pour tout entier naturel* n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.

Remarque : Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = \frac{\frac{1-u_n}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+(2u_n+1)}{2u_n+1}} = \frac{1-u_n}{\cancel{2u_n+1}} \times \frac{\cancel{2u_n+1}}{3u_n+3} \iff \boxed{v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3}}$$

b. *Démontrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n *en fonction de* n.

$\boxed{v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3} = \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{-1}{3} v_n}$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{1}{3}$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boxed{v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}$

c. *On admet que pour tout entier naturel* n, $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Exprimer u_n *en fonction de* n *et déterminer la limite de la suite* (u_n).

Remarque : $(u_n + 1)v_n = u_n - 1$ donc $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$; on trouve bien que $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

$\boxed{u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n} = \dfrac{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$ comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et par quotient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1-0} = 1}$

2 (6 points) *Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.*

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % *de ses boîtes chez le fournisseur* A *et* 20 % *chez le fournisseur* B. 10 % *des boîtes provenant du fournisseur* A *présentent des traces de pesticides et* 20 % *de celles provenant du fournisseur* B *présentent aussi des traces de pesticides.*

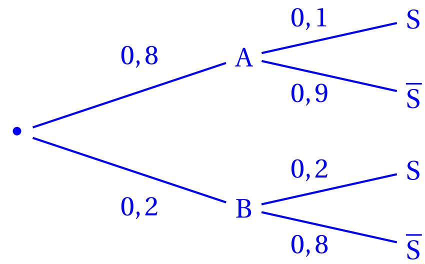
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- *évènement* A *: « la boîte provient du fournisseur* A *» ;*
- *évènement* B *: « la boîte provient du fournisseur* B *» ;*
- *évènement* S *: « la boîte présente des traces de pesticides ».*

1. *Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.*

Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non.

On a donc un arbre 2×2 :



2. **a.** *Quelle est la probabilité de l'évènement* $B \cap \overline{S}$ *?*

En suivant la quatrième branche : $\boxed{p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = 0,2 \times 0,8 = 0,16}$

b. *Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à* 0,88.

On calcule de même : $p\left(A \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72.$

$\{A\ ;\ B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc : $\boxed{p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,72 + 0,16 = 0,88}$

3. *On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.*
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

On a vu que $p\left(\overline{S}\right) = 0,88$ donc $p(S) = 1 - p\left(\overline{S}\right) = 0,12.$

Il faut donc calculer : $\boxed{p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)} = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \simeq 0,33 \text{ au centième près}}$

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 *boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de* 10 *boîtes avec remise.*
On considère la variable aléatoire X *qui associe à ce prélèvement de* 10 *boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.*

1. *Justifier que la variable aléatoire* X *suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*

On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à 0,88. C'est une épreuve de Bernoulli (à 2 issues). Répéter de façon indépendante 10 fois cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

La variable X qui comptabilise le nombre de succès, suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,88)$. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(10\ ;\ 0,88)}$

2. *Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.*

$$\boxed{p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} = 0,88^{10} \simeq 0,28 \text{ au centième près}}$$

3. *Calculer la probabilité qu'au moins* 8 *boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.*

$p(X \geqslant 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$

$$= \binom{10}{8} \times 0,88^{8} \times (1 - 0,88)^{10-8} + \binom{10}{9} \times 0,88^{9} \times (1 - 0,88)^{10-9} + \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10}$$

$\boxed{p(X \geqslant 8) \simeq 0{,}233\,043 + 0{,}379\,774 + 0{,}278\,501 \simeq 0{,}891\,318 \approx 0,89 \text{ au centième près}}$

3 (8 points)

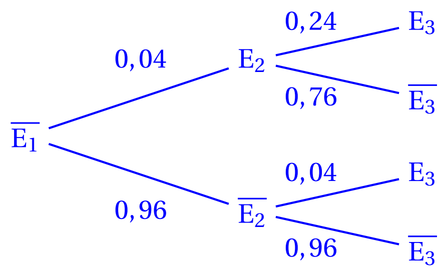
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- *Un salarié malade est absent*
- *La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.*
- *Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à* $0,04$.
- *Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à* $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a. *Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.*



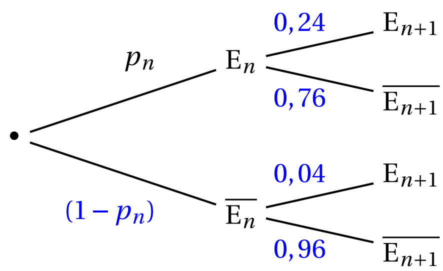
On utilise la formule des probabilités totales, avec : $\mathrm{E}_3 = (\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) \cup \left(\overline{\mathrm{E}_2} \cap \mathrm{E}_3\right)$ (union d'évènements disjoints)

$\boxed{p_3 = \mathrm{P}(\mathrm{E}_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048}$

b. *Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.*

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathrm{E}_3}(\mathrm{E}_2) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3)}{\mathrm{P}(\mathrm{E}_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2}$$

2. a. *Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous*



b. *Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.*

En appliquant la formule des probabilités totales, avec :

$$\mathrm{E}_{n+1} = (\mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_{n+1}) \cup \left(\overline{\mathrm{E}_n} \cap \mathrm{E}_{n+1}\right) \quad \text{(union d'évènements disjoints)}$$

$$\boxed{p_{n+1} = 0,24 \times p_n + 0,04 \times (1-p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04}$$

c. *Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.*

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n}$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}}$ et donc : $\boxed{p_n = u_n + 0,05 = 0,05\left(1 - 0,2^{n-1}\right)}$

d. *En déduire la limite de la suite (p_n).*

Comme $-1 < 0,2 < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05 \times 1 = 0,05}$ par produit, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - 0,2^{n-1}\right) = 1$

e. *On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :*

Variables	K et L sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 L prend la valeur 0
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ L prend la valeur $L + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher L

À quoi correspond l'affichage final L ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

- Le nombre L qui est affiché en sortie d'algorithme est un seuil :
  $\boxed{\text{le rang du premier terme de la suite } (p_n) \text{ qui s'approche de la limite } 0,05 \text{ à } 10^{-K} \text{ près}}$
  où K est un entier fixé au départ.
- $\boxed{\text{La terminaison de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite de la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}}}$
  la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0,05$.

(*Bonus*)

3. *Cette entreprise emploie* 220 *salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$. On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues. On désigne par* X *la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.*

a. *Justifier que la variable aléatoire* X *suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.*

Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « un salarié est absent pour maladie. » avec $p = 0,05$.

• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres,
on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.

• La variable aléatoire X, qui comptabilise le nombre de succès dans ce Schéma de Bernoulli,
suit la loi binomiale $\mathscr{B}(220\,;\,0,05)$. $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(220\,;\,0,05)}$

b. *Calculer l'espérance mathématique* $\mu = E(X)$ *et l'écart type* σ *de la variable aléatoire* X.

$$\boxed{\mu = E(X) = np = 220 \times 0,05 = 11 \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \simeq 3,23}$$