

1 (6 points) Le but de ce problème est d'étudier les performances d'une photocopieuse qui réalise un grand nombre de documents dans une entreprise.

Partie A - Étude de deux défauts

Les copies réalisées avec cette photocopieuse peuvent présenter deux types de défaut :

- un défaut lié à la qualité du tambour de la photocopieuse ;
- un défaut lié à la qualité de l'encre utilisée.

On prélève une copie au hasard dans l'ensemble des copies réalisées au cours d'une journée.

On note T l'événement « ma copie présente un défaut lié à la qualité du tambour », et E l'événement « la copie présente un défaut lié à la qualité de l'encre ».

On donne $P(T) = 0,02$ et $P(E) = 0,04$. On suppose de plus que les événements T et E sont indépendants.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « la copie présente les deux défauts » ; **B** : « la copie présente l'un au moins des deux défauts » ;

C : « la copie ne présente aucun défaut ».

• $P(A) = P(E \cap T) = P(E) \times P(T) = 0,04 \times 0,02 \iff P(A) = 0,0008$
T et E indépendants

• $P(B) = P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T) = 0,04 + 0,02 - 0,0008 \iff P(B) = 0,0592$

• $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,0592 \iff P(C) = 0,9408$

Partie B - Étude du nombre de copies défectueuses

On admet qu'une copie prélevée au hasard dans l'ensemble des copies réalisées au cours d'une journée donnée, est défectueuse avec une probabilité de 0,06. On appelle copie défectueuse une copie présentant au moins un des deux défauts. En appelant D l'événement « la copie est défectueuse », on a donc $P(D) = 0,06$.

On prélève au hasard 50 copies dans l'ensemble des copies réalisées pendant une journée donnée. On suppose que le nombre très important de copies réalisées dans la journée permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de copies défectueuses dans un prélèvement de 50 copies.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, et déterminer ses paramètres.

À la répétition $n = 50$ fois de façon indépendante, d'une épreuve à deux issues (succès si la copie est défectueuse), on associe une variable aléatoire $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(50 ; 0,06)$

2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, il y ait au maximum deux copies défectueuses.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{50}{0} \times 0,06^0 \times 0,94^{50} + \binom{50}{1} \times 0,06^1 \times 0,94^{49} + \binom{50}{2} \times 0,06^2 \times 0,94^{48}$$

$P(X \leq 2) \approx 0,0453 + 0,1447 + 0,2262 = 0,4162$

Partie C - Étude d'une nouvelle photocopieuse

Dans les questions 1. et 2., on admettra qu'une copie prise au hasard est défectueuse avec une probabilité de 0,06.

On souhaite utiliser la photocopieuse pour copier un document de 1 000 pages.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de copies défectueuses dans la copie de document.

Avec $n = 1\,000 \geq 30$, $np = 1\,000 \times 0,06 = 60 \geq 5$ et $n(1 - p) = 1\,000 \times 0,94 = 940 \geq 5$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire $\frac{X_{1\,000}}{1\,000}$ (la proportion de copies défectueuses sur les 1 000 pages) est :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,06 - 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1\,000}} ; 0,06 + 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1\,000}} \right] = [0,0453 ; 0,0747]$$

2. Pour la copie d'un document de n pages, à partir de quelle valeur de n a-t-on un intervalle de fluctuation au seuil de 95% inclus dans l'intervalle [0,05 ; 0,07] ?

On souhaite un intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'amplitude inférieure ou égale à $0,07 - 0,05 = 0,02$

Il faut : $2 \times 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \iff 1,96 \frac{\sqrt{0,0564}}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \iff \frac{\sqrt{0,0564}}{\sqrt{n}} \leq \frac{0,01}{1,96}$

c'est-à-dire $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0,0564}} \geq 196 \iff \sqrt{n} \geq 196 \times \sqrt{0,0564} \iff n \geq 196^2 \times 0,0564 \iff n \geq 2\,166,6624$

À partir de $n = 2\,167$ pages, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est inclus dans l'intervalle [0,05 ; 0,07]

3. Après un an d'utilisation, on se demande si la proportion de copies défectueuses est toujours de 6%.

On effectue un test sur un échantillon de 1 000 copies, et on en trouve 79 défectueuses.

Doit-on accepter ou rejeter l'hypothèse que le taux de défectuosité est toujours de 0,06 au seuil de 95% ?

Dans cet échantillon de 1 000 copies la proportion de copies défectueuses observée est $f = \frac{79}{1\,000} = 0,079$

$f = 0,079 \notin [0,045\,3 ; 0,074\,7]$ intervalle au seuil de 95% de la proportion de copies défectueuses si $p = 0,06$.

Avec un risque de 5%,

je rejette l'hypothèse d'un échantillon conforme a un taux de défectuosité de 0,06 au seuil de 95%.

Remarque : à partir de cet échantillon de taille $n = 1\,000$, l'intervalle de **confiance** au seuil de 95% est :

$$\left[0,079 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} ; 0,079 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \right] = [0,047\,4 ; 0,110\,6]$$

Le taux de défectuosité se situe entre 0,047 et 0,111 avec un niveau de confiance de 0,95.

2 (4 points) On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu un crise d'asthme dans leur vie est de 13%.

Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.

Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.

Avec $n = 100 \geq 30$, $np = 100 \times 0,13 = 13 \geq 5$ et $n(1-p) = 100 \times 0,87 = 87 \geq 5$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100 est :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,13 - 1,96 \frac{\sqrt{0,13 \times 0,87}}{\sqrt{100}} ; 0,13 + 1,96 \frac{\sqrt{0,13 \times 0,87}}{\sqrt{100}} \right] = [0,06 ; 0,20]$$

2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

$f = 0,19 \in [0,06 ; 0,20]$

La valeur 0,19 est à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, on en conclut que la règle de décision choisie ne prévoit pas de réaliser une enquête supplémentaire.

3. Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d'asthme que dans le reste du département.

Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu'une proportion observée de 19% soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

Il s'agit de déterminer la taille n de l'échantillon telle que :

$$0,13 + 1,96 \frac{\sqrt{0,13 \times 0,87}}{\sqrt{n}} < 0,19 \iff \frac{\sqrt{0,113\,1}}{\sqrt{n}} < \frac{0,06}{1,96} \iff \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0,113\,1}} > \frac{196}{6} \iff n > \left(\frac{196}{6} \right)^2 \times 0,113\,1$$
$$\iff n > 120,69$$

À partir de $n = 121$ sujets, la proportion observée de 19% est en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% et une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

3 (5 points) Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. **Cocher la bonne réponse.**

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

Partie A - \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont deux plans, d est une droite de \mathcal{P} et d' une droite de \mathcal{P}' .

1. Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles alors :

- d et d' sont parallèles ;
 d et d' ne sont pas coplanaires ;
 on ne peut pas préciser la position relative de d et d' .

Par exemple sur la figure **partie B** on a $\mathcal{P} = (EFG) \parallel (ABC) = \mathcal{P}'$ et pourtant $(EF) = d \parallel d' = (AB)$ ou alors $(EG) = d$ et $d' = (AB)$ non coplanaires.

2. Si d et d' sont parallèles et si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants suivant une droite D alors :

- d, d' et D sont concourantes ;
 d, d' et D sont parallèles ;
 d, d' et D sont coplanaires.

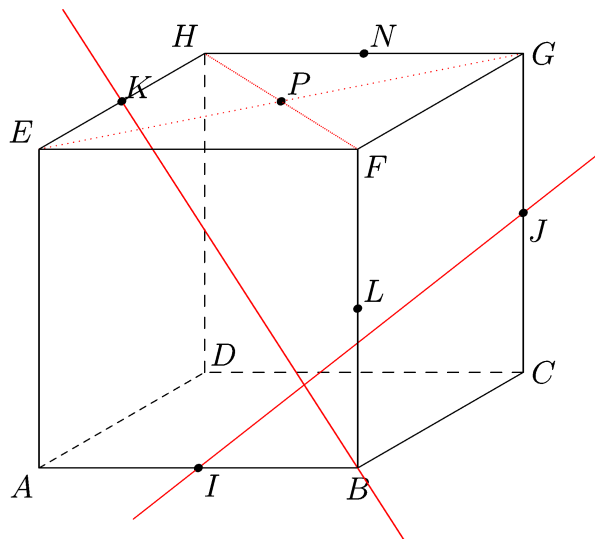
voir cours **Théorème du toit**.

3. Si d et d' sont sécantes et si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants suivant une droite D alors :

- d, d' et D sont concourantes ;
 d, d' et D sont parallèles ;
 d, d' et D sont coplanaires.

$\underbrace{d \cap d'}_{\text{Point}} \in \underbrace{\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'}_{\text{Droite}} = D$, donc d, d' et D sont concourantes.

Partie B - ABCDEFGH est un cube, on note I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [GC], [EH] et [BF]. Soit P le centre de la face EFGH.



1. Les droites (IJ) et (KB) sont :

- sécantes ;
 perpendiculaires ;
 non coplanaires.

Le point $K \notin (IBJ) = (ABJ)$ donc les droites (IJ) et (KB) sont non coplanaires.

2. La droite (KB) est :

- strictement parallèle au plan (AIJ) ;
 incluse dans le plan (AIJ) ;
 sécante au plan (AIJ).

$(KB) \cap (AIJ) = (KB) \cap (ABJ) = \{B\}$ donc la droite (KB) est sécante au plan (AIJ) en B.

3. Le plan (EBK) coupe la face CDHG suivant la droite :

- (HC) ;
 (HI) ;
 (HG).

$(EBK) \cap (CDHG) = (ECH) \cap (CDHG) = (HC)$

4. Le plan (PLJ) coupe la face ABCD suivant une droite parallèle à :

- (IC) ;
 (LJ) ;
 (EG).

voir cours **Théorème du toit** : $(LJ) \parallel (BC)$ et $(PLJ) \cap (ABC) = \Delta$ alors $\Delta \parallel (IJ)$.

Partie C - On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1 ; 2 ; 0)$ et $(0 ; 3 ; 1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1 ; 1 ; -1)$, $(-1 ; 4 ; 2)$, $(1 ; 5 ; 1)$.

- Les points A, B, C définissent le plan P ; Les points A, B, D définissent le plan P ; Les points A, B, E définissent le plan P.

• Le point C n'appartient pas au plan P : $2 - 1 + 3 = 0$ est faux.

• Le point $D(-1 ; 4 ; 2) \in P \iff -2 - 4 + 6 = 0$: vrai ; mais $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ les points A, B, D sont alignés : ils ne définissent pas un plan

• $E(1 ; 5 ; 1) \in P \iff 2 - 5 + 3 = 0$: vrai. De plus, $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à \overrightarrow{AB} .

Conclusion les trois points A, B et E définissent le plan P.

2. La droite \mathcal{D} est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

- La droite \mathcal{D} est perpendiculaire au plan P ; La droite \mathcal{D} est strictement parallèle au plan P ; La droite \mathcal{D} est incluse dans le plan P.

• Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal au plan P a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc \mathcal{D} n'est pas perpendiculaire au plan P

• Le produit scalaire des deux vecteurs précédents est égal à : $-2 - 1 + 3 = 0$,

donc la droite \mathcal{D} est parallèle au plan P. Le point de \mathcal{D} correspondant à $t = 0$, donc de coordonnées $(1 ; 0 ; 2)$ n'appartient pas à P (l'égalité $2 + 6 = 0$ est fautive), donc la droite \mathcal{D} est strictement parallèle au plan P.

3. Les droites (AC) et (DE) sont :

- parallèles ; perpendiculaires ; orthogonales.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ et $(AC) \cap (DE) = \emptyset$ avec (AC) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$ et (DE) $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = 4 + t' \\ z = 2 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$

TS. Contrôle 3 - Correction

4 (5 points) Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. **Cocher la bonne réponse.**

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. On considère la variable aléatoire X de densité de probabilité f définie par $f(x) = -\frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2}$ sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

La probabilité de l'événement $\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)$ est égale à :

- $\frac{7}{48}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{32}$

Une primitive F est définie sur $[0 ; 2]$ par : $F(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{4}$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = -\frac{1}{32} + \frac{3}{16} - 0 = \frac{5}{32}$$

2. Soit X la variable aléatoire de loi uniforme sur $[-3 ; 2]$. La probabilité $P(-2 < X < 1)$ est égale à :

- 0,6 0,5 0,4 0,3

Soit X la variable aléatoire de loi uniforme sur $[-3 ; 2]$. $P(-2 < X < 1) = \frac{1 - (-2)}{2 - (-3)} = \frac{3}{5} = 0,6$

3. L'espérance de la variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = 2$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ est égale à :

- 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

X de densité f définie par $f(x) = 2$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ suit une loi uniforme sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $E(X) = \frac{1}{4}$ (le milieu de l'intervalle)

4. T , le temps d'attente d'un bus en minutes, suit la loi exponentielle de paramètre $0,05$.

a. La probabilité d'attendre un bus plus d'un quart d'heure est égale à :

- 0,25 $e^{-0,0125}$ $e^{-0,75}$ $e^{-1,25}$

$$P(T > 15) = 1 - P(T \leq 15) = 1 - \int_0^{15} 0,05 \cdot e^{-0,05x} dx = 1 - [-e^{-0,05x}]_0^{15} = 1 - (1 - e^{-0,05 \times 15}) = e^{-0,05 \times 15} = e^{-0,75}$$

b. La probabilité $P_{T>10}(T > 30)$ est égale à :

- $\frac{1}{e}$ $e^{-0,15}$ $e^{-0,1}$ $e^{-0,3}$

$$P_{T>10}(T > 30) = P(T > 20) = e^{-0,05 \times 20} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

durée de vie sans vieillissement

c. Le temps d'attente moyen d'un bus est égal à :

- 5 minutes 3 minutes 20 minutes 15 minutes

Le temps d'attente moyen d'un bus est égal à $E(T) = \frac{1}{0,05} = 20$ (minutes)

5. La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.

a. La probabilité $P(-1 \leq X \leq 2)$, arrondie à 10^{-2} près, est égale à :

- 0,14 0,82 0,75 0,18

La probabilité $P(-1 \leq X \leq 2)$, arrondie à 10^{-2} près est égale à **0,82**

(calculatrice : NormCD(-1, 2) sur Casio, ou normalFRep(-1, 2) sur Texas).

b. Le réel $u_{0,15}$ tel que $P(-u_{0,15} \leq X \leq u_{0,15}) = 0,85$, arrondi à 10^{-2} près, est égal à :

- 1,44 1,04 1,64 1,24

$$P(-u_{0,15} \leq X \leq u_{0,15}) = P(X \leq u_{0,15}) - P(X < -u_{0,15}) = P(X \leq u_{0,15}) - (1 - P(X \leq u_{0,15})) = 2P(X \leq u_{0,15}) - 1,$$

donc $P(-u_{0,15} \leq X \leq u_{0,15}) = 0,85 \iff 2P(X \leq u_{0,15}) - 1 = 0,85$, soit : $P(X \leq u_{0,15}) = \frac{0,85 + 1}{2} = 0,925$

Une calculatrice donne $u_{0,15} \approx 1,44$. (InvNormCD(0,925) sur Casio, FracNormale(0,925) sur Texas).

6. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ avec $m = 1,4$ et $\sigma = 0,3$.

a. La probabilité $P(X > 1,1)$, arrondie à 10^{-2} près, est égale à :

- 0,32 0,68 0,16 0,84

$$P(X > 1,1) = P(1,1 < X < 1,4) + 0,5 \approx 0,84$$
 (calculatrice pour $P(1,1 < X < 1,4)$:

NormCD(1,1, 1,4, 0,3, 1,4) sur Casio et NormalFRep(1,1, 1,4, 1,4, 0,3) sur Texas).

b. Le réel k tel que $P(X < k) = 0,75$, arrondi à 10^{-2} près, est égal à :

- 1,55 1,60 1,70 1,25

Le réel k tel que $P(X < k) = 0,75$ arrondi à 10^{-2} près est égal à **1,60**

(calculatrice : InvNormCD(0,75, 0,3, 1,4) sur Casio et FracNormale(0,75, 1,4, 0,3) sur Texas).