

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Lorsque le paramètre n est grand, et que p est ni trop proche de 0, ni trop proche de 1, on peut approcher la loi binomiale de paramètres n et p par la loi normale de paramètres np et $\sqrt{np(1-p)}$.

Dans la pratique, comme l'approximation faite est une approximation d'une loi discrète par une loi continue, nous devons effectuer *une correction de continuité*, c'est à dire qu'à la valeur x_0 d'une valeur discrète, nous associerons l'intervalle $[x_0 - 0,5 ; x_0 + 0,5]$ pour la variable continue.

Exemple : On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(400 ; 0,5)$.

On peut approcher cette loi par la loi normale $\mathcal{N}(200 ; 10)$. Ainsi, si l'on considère la variable Y suivant cette loi normale, on approchera $P(X = 190)$ par $P(189,5 \leq Y \leq 190,5)$.

En effectuant le changement de variable adéquat, on a $P(189,5 \leq Y \leq 190,5) = P(-1,05 \leq T \leq -0,95) = 0,0242$, ce qui donne ici une très bonne approximation puisque le calcul direct donne $P(X = 190) = 0,0242071389611$.

De même, $P(X \leq 210)$ sera approché par $P(Y \leq 210,5) = P(T \leq 1,05) = 0,8531$.

Par contre, $P(X < 205) = P(X \leq 204)$, (X est une variable discrète),

il faudra donc approcher cette probabilité par $P(Y \leq 204,5)$.

1 Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande.

Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photographiques par jour et les ventes sont deux à deux indépendantes.

Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6% du marché.

1. On note X la variable aléatoire qui, un jour donné, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

On peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli où l'évènement « succès » est « l'appareil de marque A est vendu », alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

$n = 40$ et $p = 0,386$ (la marque A réalise 38,6% du marché).

b. Calculer la probabilité que, sur 40 appareils vendus par jour, 20 soient de la marque A. En donner une valeur arrondie à 0,01 près.

$$P(X = 20) = \binom{40}{20} \times (0,386)^{20} \times (0,614)^{20} \approx 0,04$$

c. Calculer l'espérance de X . Calculer l'écart type de X et en donner une valeur approchée à 1 près.

$$E(X) = np = 40 \times 0,386 = 15,44 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \times 0,386 \times 0,614} \approx 3$$

2. On décide d'approcher cette loi par loi normale de paramètres m et σ .

a. Expliquer pourquoi $m = 15,44$ et $\sigma = 3$

On peut approcher la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,386$ par la loi normale de paramètres $m = np = 15,44$ et $\sqrt{np(1-p)} = 3$

Dans ce qui suit, tous les résultats seront arrondis à 0,01 près.

b. On note Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(15,44 ; 3)$. Donner une approximation de la probabilité de l'évènement : « un jour choisi au hasard, il y a exactement 20 appareils de marque A vendus », c'est-à-dire calculer $P(19,5 \leq Y \leq 20,5)$.

$$\text{En effectuant le changement de variable } T = \frac{Y - m}{\sigma} = \frac{Y - 15,44}{3}$$

T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$ et on a :

$$P(19,5 \leq Y \leq 20,5) = P(1,35 \leq T \leq 1,68) = 0,9535 - 0,9114 = 0,0421 \approx 0,04$$

c. Déterminer une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « un jour donné, 20 au moins des appareils vendus sont de marque A », c'est-à-dire calculer $P(Y \geq 19,5)$.

$$P(Y \geq 19,5) = P(T \geq 1,35) = 1 - P(T < 1,35) = 1 - 0,9114 = 0,0886 \approx 0,09$$

d. Déterminer une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « un jour donné, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 15 et 25 », c'est-à-dire calculer $P(14,5 \leq Y \leq 25,5)$.

$$P(14,5 \leq Y \leq 25,5) = P(-0,31 \leq T \leq 3,35) = P(-0,31 \leq T \leq 0) + P(0 \leq T \leq 3,35)$$

$$P(14,5 \leq Y \leq 25,5) = 0,1217 + 0,4996 = 0,6213 \approx 0,62$$

2 Dans une revue on peut lire : « On estime à 60,5% le pourcentage de Français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année ». On considère 100 personnes prises au hasard avec remise dans la population française. Dans ce qui suit, tous les résultats seront arrondis à 0,01.

1. On désigne par X la variable aléatoire mesurant, parmi ces 100 personnes, le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

On peut assimiler ces 100 personnes choisies au hasard de façon indépendantes à un schéma de Bernoulli où l'évènement « succès » est « la personne ne part pas en vacances dans le courant de l'année », alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

$n = 100$ et $p = 0,395$ (60,5% de Français partent au moins une fois en vacances dans le courant de l'année).

b. Calculer l'espérance et l'écart type de X .

$$E(X) = np = 100 \times 0,395 = 39,5 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,395 \times 0,605} \approx 4,89$$

c. Calculer $P(X = 45)$.

$$P(X = 45) = \binom{100}{45} \times (0,395)^{45} \times (0,605)^{55} \approx 0,04$$

2. On décide d'approcher cette loi par la loi normale $\mathcal{N}(39,5 ; 4,89)$. Soit Y la variable aléatoire suivant cette loi.

a. Calculer une valeur approché de l'évènement « 45 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c'est-à-dire calculer $P(44,5 \leq Y \leq 45,5)$.

En effectuant le changement de variable $T = \frac{Y - m}{\sigma} = \frac{Y - 39,5}{4,89}$

T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$ et on a :

$$P(44,5 \leq Y \leq 45,5) = P(1,02 \leq T \leq 1,22) = 0,8887 - 0,8461 = 0,0426 \approx 0,04$$

b. Calculer une valeur approché de l'évènement « au plus 30 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c'est-à-dire calculer $P(Y \leq 30,5)$.

$$P(Y \leq 30,5) = P(T \leq -1,84) = 1 - P(T \leq 1,84) = 1 - 0,9671 = 0,0329 \approx 0,03$$