Ex 1 :(10 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1. (a) *On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

   f est une somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

   $\boxed{f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{x+3} - 1 = \dfrac{5-x-3}{x+3} = \dfrac{2-x}{x+3}}$ Or $x \geqslant 0 \implies x+3 \geqslant 3 > 0$.

   D'où le tableau de signes de $f'(x)$ qui est du signe de $2-x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   (b) *Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*

   - La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ 2[$ et décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$.
   - $f(2) = 5\ln(5) - 2 \approx 4,047$ est le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   On a le tableau de variations suivant :

x	0		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0			$-$	
$f(x)$	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln(5)-2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   (c) *Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.*

   Comme $x > 0$, on peut factoriser :

   $f(x) = 5\ln\left[x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right] - x = 5\ln x + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) - x = 5\ln x - x + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

   $$\boxed{f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

   (d) *En déduire la limite de f en $+\infty$.*

   - On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc **par produit** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$
   - On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 5\ln 1 = 0$

   donc finalement **par somme** : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5\times(-x) = -\infty}$ D'autre part $f(0) = 5\ln 3$.

   (e) *Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*

   Voir le tableau plus haut.

2. (a) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.*

   Sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$, f est **continue, strictement décroissante, de $f(2) > 0$ à** $-\infty$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

   il existe donc un réel unique $\alpha > 2$, tel que $\boxed{f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0}$

(b) *Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\ ;\ 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.*

$f(14) = 5\ln 17 - 14 \approx 0,17 > 0$ et $f(15) = 5\ln 18 - 15 \approx -0,55 < 0$, donc $\boxed{14 < \alpha < 15}$ et par balayage :

- $f(14{,}234) = 5\ln(17{,}234) - 14{,}234 \approx 0{,}000\ 42 > 0$
- $f(14{,}235) = 5\ln(17{,}235) - 14{,}235 \approx -0{,}000\ 29 < 0$

donc $\boxed{14{,}234 < \alpha < 14{,}235 \implies \alpha \simeq 14{,}23 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

(c) *En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*

Le tableau de variations de f entraine le tableau de signes de f :

x	0	2	α	$+\infty$
$f(x)$	$5\ln 3$ ↗	$5\ln(5)-2$ ↘	0 ↘	$-\infty$
$f(x)$	$+$		0	$-$

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) \end{cases}$ pour tout entier naturel $n \neq 0$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.

*En annexe **3** on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.*

1. (a) *Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe **3** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.*

   (b) *Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)*

   La suite (u_n) semble être croissante.

2. (a) *Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*

   La fonction g a même sens de variation que la fonction $\ln$, soit croissante ;

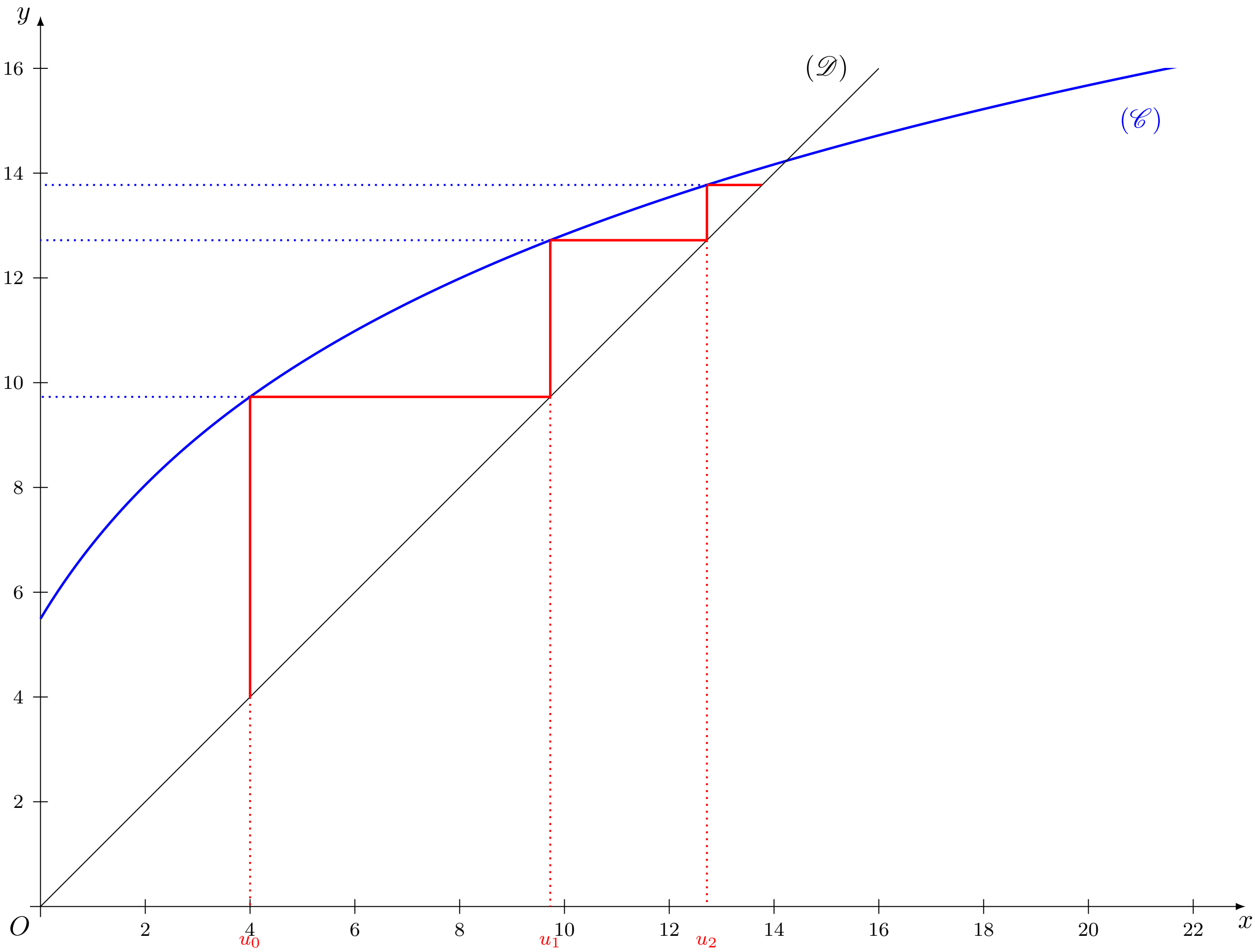
   on peut également calculer $g'(x) = \dfrac{5}{x+3} > 0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		
$g(x)$	$5\ln 3$ ↗	α ↗	$+\infty$

   (b) *Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.*

   On a vu dans la partie A que $\boxed{f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha}$

Annexe 3 - Ex 3.



(c) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a* $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

- **Initialisation** : On a $0 \leqslant 4 \leqslant \alpha$: avec $u_0 = 4$, l'encadrement est vrai au rang 0 ;
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$
  La fonction g est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc en particulier sur $[0\ ;\ \alpha]$, on a donc :
  $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(\alpha)$ c'est-à-dire
  $5\ln 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ (d'après la question précédente).
  On a donc *à fortiori* : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La proposition est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion** : La proposition est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire donc par récurrence on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \alpha}$

(d) *Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.*

On a vu que sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha[$, $f(x) > 0$

donc pour tout u_n tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$, $\ln(u_n + 3) - u_n > 0 \iff \ln(u_n + 3) > u_n$

$\iff g(u_n) > u_n \iff u_{n+1} > u_n$

ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.

Cette suite est **croissante et majorée** par α : **elle converge** donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant \alpha$.

(e) *En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

La relation $u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3)$ donne **par continuité** de la fonction dérivable g et par limite en plus l'infini :

$\ell = \ln(\ell + 3) \iff \ln(\ell + 3) - \ell = 0 \iff f(\ell) = 0$.

Or on a vu à la question 2. a. de la partie A que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Conclusion $\ell = \alpha$. On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$

3. *On considère l'algorithme suivant :*

u prend la valeur 4
Tant que $u - 14,2 < 0$
$\quad$ u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

(a) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que cet algorithme se termine.

Cet algorithme calcule successivement les termes de la suite (u_n) : $u_1,\ u_2,\ \ldots.$

On a vu que **cette suite converge vers le nombre α supérieur à $14,2$**. À partir d'un certain rang on a donc $u_n \geqslant 14,2$ et la condition $u - 14,2 \geqslant 0$ sera donc réalisée et l'algorithme affichera la première valeur de la suite supérieure à $14,2$.

(b) *Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).*

Il suffit de taper sur la calculatrice :

$u_0 = 4$ Entrée

$5 \star \ln(\text{ANS}(1) + 3)$ Entrée

Entrée, etc

On obtient $\boxed{u_6 \approx 14{,}223\ 15 > 14,2}$