Ex 1 : (7 points) **Commun à tous les candidats**

Partie 1 *Soit g la fonction définie sur* $[0\,;\,+\infty[$ *par* $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. *Déterminer la limite de g en $+\infty$. Étudier les variations de la fonction g et donner le tableau de variations de g.*

On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(1-x) = -\infty$ par produit avec $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty\end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(1-x)+1 = -\infty}$

La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur $[0\,;\,+\infty[$:
$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x \geq 0$, on a $g'(x) \leq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
g est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	0	$-\infty$

2. **a.** *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.*

Sur $[0\,;\,+\infty[$, g dérivable est donc continue et décroissante, $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

$\boxed{\text{D'après le tableau de variations de } g \text{ il existe un réel unique } \alpha \in [0\,;\,+\infty[\text{ tel que } g(\alpha) = 0}$

b. *À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.*

La calculatrice donne :

- $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
- $g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$;
- $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $\boxed{1,27 < \alpha < 1,28}$

c. *Démontrer que* $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$. On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \boxed{\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}}$

3. *Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.*

On a donc
$g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
$g(\alpha) = 0$;
$g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2 *Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que* $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. *Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.*

La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$\boxed{A'(x) = \frac{4(\mathrm{e}^x+1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{4(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}$$

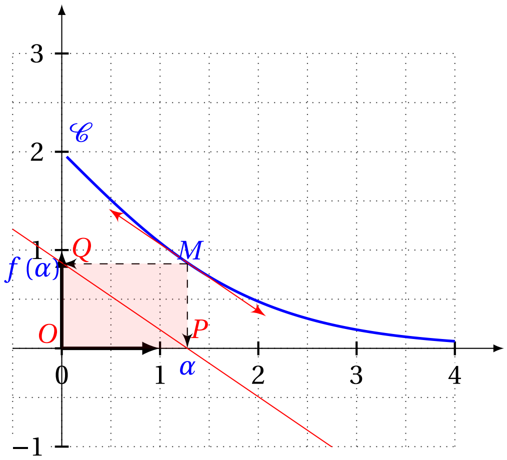
Comme $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après la précédente question on a donc : $A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$; $A'(\alpha) = 0$; $A'(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

2. *En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.*

$A(x)$ est croissante sur $[0\,;\,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	0

Partie 3 *On considère la fonction f définie sur* $[0\,;\,+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$.



On note $(\mathscr{C})$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $\left(x\,;\,f(x)\right)$,

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,

Q le point de coordonnées $\left(0\,;\,f(x)\right)$.

1. *Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.*
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

   On sait que $x\geqslant 0$, donc l'aire du rectangle $\mathrm{O}PMQ$ est égale à $\boxed{x\times f(x)=\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}=A(x)}$

   Or on a vu que la fonction $x\longmapsto A(x)$ présente un maximum pour $x=\alpha$

2. *Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?*
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\dfrac{f(\alpha)}{-\alpha}=\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}}{-\alpha}=\dfrac{-4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)}$.

   Or $\mathrm{e}^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à : $\dfrac{-4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)}=\dfrac{-4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)}=\dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)}=\dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

   La tangente en $M(\alpha\,;\,f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

   Or $f'(x)=-\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$, donc $f'(\alpha)=-\dfrac{4\mathrm{e}^{\alpha}}{\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)^2}=\dfrac{\frac{-4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}=\dfrac{-4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2}=\dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

   Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.

Ex 2 :(5 points) **Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. *On prendra 2 cm pour unité graphique.*
On appelle J le point d'affixe i.

1. *On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives* $a=-3-\mathrm{i}$, $b=-2+4\mathrm{i}$, $c=3-\mathrm{i}$ *et* $h=-2$.
   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

   Pour ce corrigé l'unité graphique n'est pas respectée.

2. *Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.*

   $\boxed{JA=\left|j-a\right|=|-3-2\mathrm{i}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}}$. On trouve de même que $\boxed{JB=\sqrt{13}}$ et que $\boxed{JC=\sqrt{13}}$.

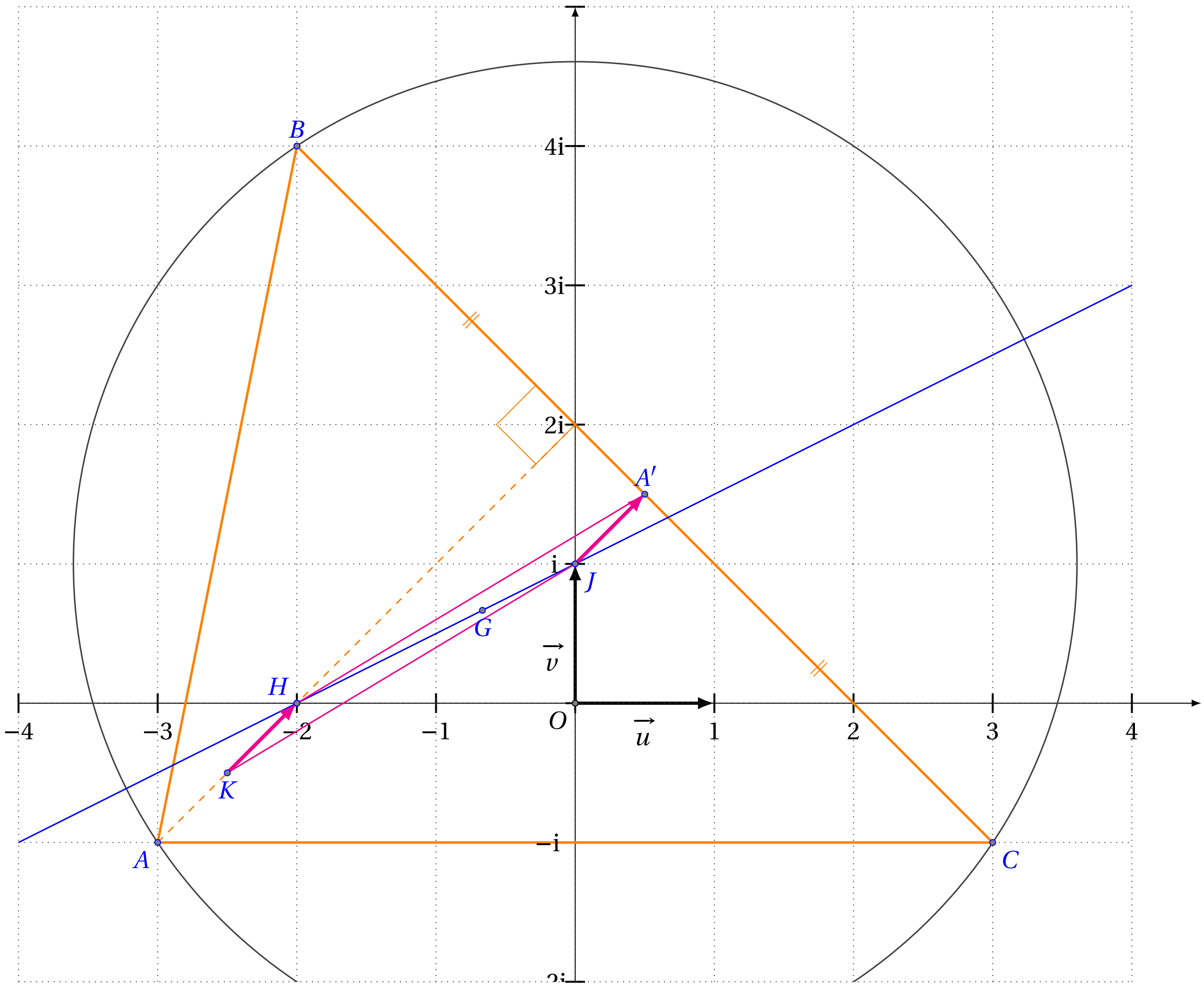
   Le cercle circonscrit au triangle ABC a donc pour centre J et pour rayon $\sqrt{13}$.

3. *Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe* $\dfrac{b-c}{h-a}$. *En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.*

   On a : $\dfrac{b-c}{h-a}=\dfrac{-5+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-5+5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=5\mathrm{i}$.

   Par conséquent : $\boxed{\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\arg(5\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi],\ \text{ce qui prouve que } (AH)\perp(BC)}$

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.



4. *On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.*

G est l'isobarycentre du système $\{A\,;\ B;\ C\}$ donc, d'après le cours :

$$\boxed{g=\frac{a+b+c}{3}=\frac{-3-i-2+4\mathrm{i}+3-\mathrm{i}}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}}$$

5. *Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.*

Le vecteur $\overrightarrow{HJ}$ a pour affixe $j-h=2+\mathrm{i}$, le vecteur $\overrightarrow{JG}$ a pour affixe $g-j=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{i}$.

On a donc $g-j=-\frac{1}{3}(j-h)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{JG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HJ}$.

Ces deux vecteurs étant colinéaires, les points J, G et H sont donc alignés, ce qui se vérifie sur la figure.

6. *On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.*

a. *Déterminer l'affixe du point K.*

Notons k l'affixe du point K, alors : $\boxed{k=\frac{a+h}{2}=\frac{-3-\mathrm{i}-2}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}}$

b. *Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.*

Le vecteur $\overrightarrow{KH}$ a pour affixe $h-k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{JA'}$ a pour affixe $a'-j=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Ces deux vecteurs ayant même affixe, ils sont égaux, et le quadrilatère $KHA'J$ est donc un parallélogramme.

Ex 3 :(5 points) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$.

Si f est définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** *Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.*

En partant du point $((u_0 = 5\ ;\ 0)$ et en allant alternativement verticalement vers la courbe $\mathscr{C}$ et horizontalement vers la droite Δ, on obtient les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses, u_1, u_2, u_3 etc. Voir la figure

b. *Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?*

Sur la vue des premiers termes il semble que la suite soit décroissante vers l'abscisse du point commun à $\mathscr{C}$ et à Δ il semble que la suite converge vers 1.

2. **a.** *Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.*

- Initialisation : on a $u_0 - 1 = 5 - 1 = 4 > 0$: la proposition est vraie pour $n = 0$
- Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - 1 > 0$. *je suppose la proposition vraie au rang n*

  Or $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ donc $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \dfrac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \dfrac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

  On sait que $u_n - 1 > 0$, donc $u_n > 1$ et $u_n + 2 > 3 > 0$. Tous les termes de $u_{n+1} - 1$ sont supérieurs à zéro, donc finalement $u_{n+1} - 1 > 0$. *alors la proposition est vraie au rang $n+1$*
- Conclusion : la proposition est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire donc par récurrence on a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n - 1 > 0}$

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question **1. b.**

- Décroissance de la suite :

soit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 2} = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$.

Les deux termes du quotients sont positifs, donc finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

- Convergence de la suite : $u_n - 1 > 0 \iff u_n > 1$

La suite étant minorée par 1 et décroissante converge vers une limite $\ell \geqslant 1$ et par continuité de la fonction f, on a $\ell = \dfrac{4\ell - 1}{\ell + 2}$ équation dont la seule solution est $\ell = 1$. La suite (u_n) converge vers 1.

3. *Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.*

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. *Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.*

On a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Or on a vu ci-dessus (démonstration par récurrence) que $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$, donc

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \dfrac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3}$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{5 - 1} = \dfrac{1}{4}$

b. *Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.*

On sait que $\boxed{v_n = v_0 + n \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \times n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{3 + 4n}{12}}$.

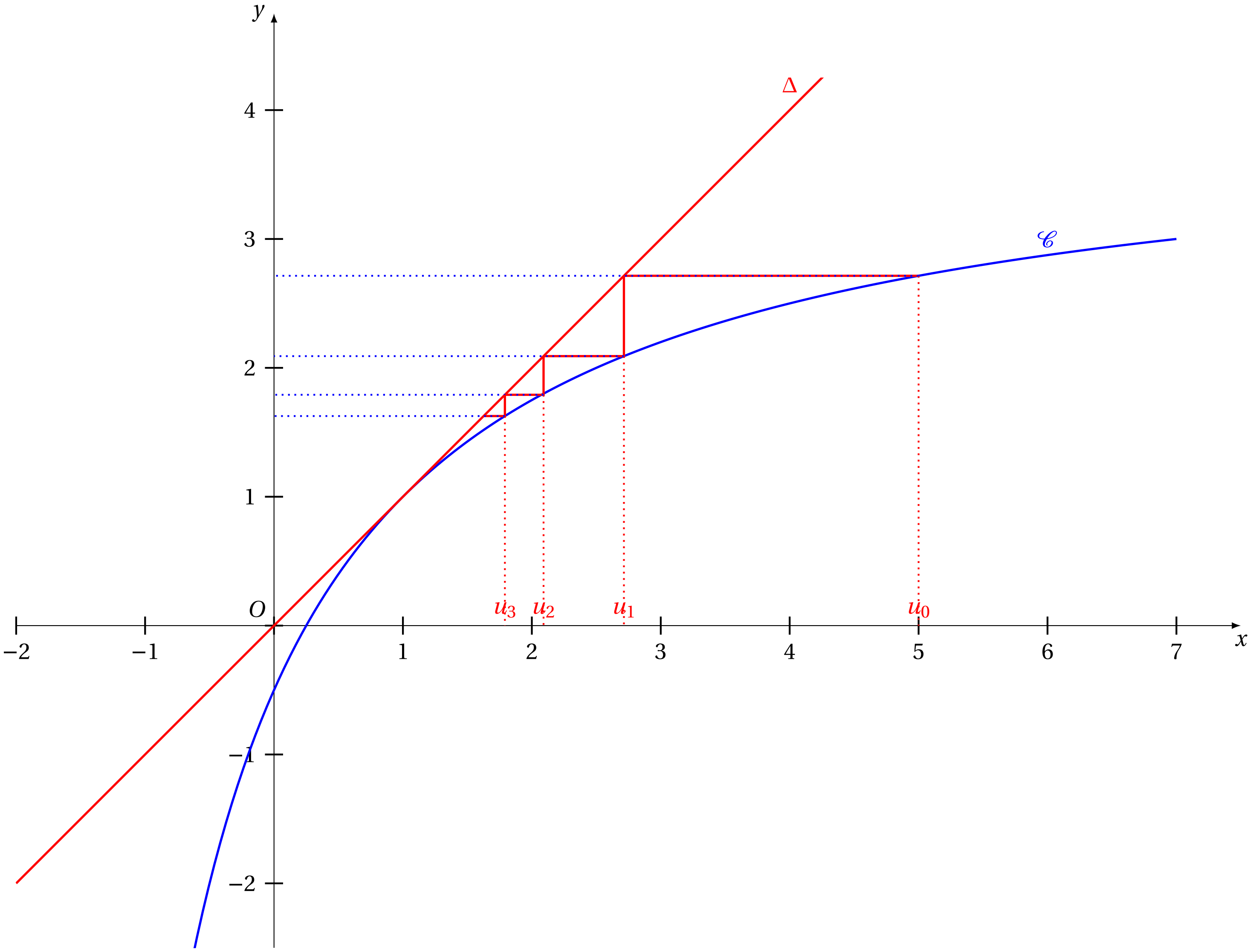
Or $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \iff u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} \iff \boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{12}{3 + 4n} + 1 = \dfrac{12 + 3 + 4n}{3 + 4n} = \dfrac{15 + 4n}{3 + 4n}}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

On retrouve ici que les termes de (u_n) sont des rationnels et comme le suggérait les constructions du **1. a.** que $u_1 = \dfrac{19}{7}$, $u_2 = \dfrac{23}{11} = 2$, $u_3 = \dfrac{9}{5} = 1,8$.

c. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{15 + 4n}{3 + 4n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cancel{4n}}{\cancel{4n}} = 1}$

Annexe de l'exercice



Ex 4 : (3 points) **Commun à tous les candidats**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant :
les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbb{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. *Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).*

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 0$, donc $\underbrace{u'(x)}_{y'} = a \times \underbrace{\left(-\dfrac{b}{a}\right)}_{y} + b \iff 0 = -b + b$.

Donc la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).

2. *Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Démontrer l'équivalence suivante : f est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $f - u$ l'est aussi et quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$(f - u)(x) = f(x) - u(x)$, d'où
$(f - u)'(x) = f'(x) - u'(x) = f'(x)$.
Donc f est solution de (E) si et seulement si quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = af(x) + b &\iff f'(x) - u'(x) = af(x) - au(x) + au(x) + b \\ &\iff (f-u)'(x) = a(f(x) - u(x)) + a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b \\ &\iff (f-u)'(x) = a(f(x) - u(x)) - b + b \\ &\iff (f-u)'(x) = a(f(x) - u(x)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

3. *En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).*

D'après le résultat initial donné on a donc $f(x) - u(x) = K\mathrm{e}^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$, donc : $\boxed{f(x) = K\mathrm{e}^{ax} + u(x) = K\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}}$

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue.
On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. *Démontrer que* $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.

L'équation différentielle peut s'écrire : $v'(t) = 3 - \frac{1}{10}v(t)$.

On reconnaît une équation différentielle résolue dans la **partie A** avec $a = -\frac{1}{10}$ et $b = 3$.
On a donc :
$v(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} - \dfrac{3}{-\frac{1}{10}} = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + 30$.

En utilisant la condition initiale $v(0) = 0 \iff K + 30 = 0 \iff K = -30$, on obtient finalement :

$$\boxed{v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)}$$

2. a. *Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.*

On sait que la fonction v est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$v'(t) = -30\left(-\frac{1}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} = 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$, car on sait que $\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$, quel que soit le réel t.

La fonction v est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. *Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.*

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right) = 1$, donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} v(t) = 30}$

Ex 3 :(5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**
Cet exercice est à rendre sur une feuille séparée.

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 du nombre 7^n .

   b. Démontrer alors que $(2\,005)^{2\,005} \equiv 7\ [9]$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $10^n \equiv 1\ [9]$.

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $\mathrm{N} \equiv \mathrm{S}\ [9]$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.

3. On suppose que $\mathrm{A} = (2\,005)^{2\,005}$; on désigne par :

   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $\mathrm{A} \equiv \mathrm{D}\ [9]$.

   b. Sachant que $2\,005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.
   En déduire que $\mathrm{B} \leqslant 72\,180$.

   c. Démontrer que $\mathrm{C} \leqslant 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

   e. Démontrer que $\mathrm{D} = 7$.