Barycentres : Résumé de cours et méthodes

On appelle point pondéré tout couple (A,a) où A est un point et a un réel.

1 Barycentre de deux points

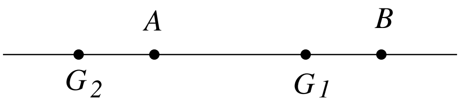
DÉFINITION

> Si $a+b \neq 0$, le barycentre des points pondérés $(A,a)\,(B,b)$ est le point G tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

PROPRIÉTÉ

> Si $a+b \neq 0$, G barycentre de $(A,a)\,(B,b)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

Cette propriété est utilisée pour construire graphiquement le barycentre de deux points.
Exemples : A et B sont deux points distants de 3 cm.
G_1 barycentre de $(A,1)\,(B,2)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1}=\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
G_2 barycentre de $(A,4)\,(B,-1)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_2}=\dfrac{-1}{4+(-1)}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



Remarque : Si $A \neq B$, les points A, B et G sont alignés.
PROPRIÉTÉ

> Si $a+b \neq 0$, le barycentre du système $(A,ka)\,(B,kb)$ (avec $k \neq 0$) est le même que celui du système $(A,a)\,(B,b)$.

Exemple : le barycentre de $(A,4)\,(B,-2)$ est le barycentre de $(A,2)\,(B,-1)$.

PROPRIÉTÉ

> Si $a+b \neq 0$, les coordonnées du barycentre de $(A,a)\,(B,b)$ dans un repère sont telles que :
> $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}$ et $y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}$

DÉFINITION

> On appelle **isobarycentre** de deux points A et B, le barycentre de ces deux points pondérés par un même coefficient. Il s'agit en fait du **milieu** du segment $[AB]$.

Exemple : on peut affirmer sans calculs que le barycentre du système $(A,-3)\,(B,-3)$ est le milieu de $[AB]$.

2 Barycentre de trois points

DÉFINITION

> Si $a+b+c \neq 0$, le barycentre des points pondérés $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$ est le point G tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

PROPRIÉTÉ

> Si $a+b+c \neq 0$, le barycentre du système $(A,ka)\,(B,kb)\,(C,kc)$ (avec $k \neq 0$) est le même que celui du système $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$.

Exemple : le barycentre de $(A,-3)\,(B,-6)\,(C,-12)$ est le barycentre de $(A,1)\,(B,2)\,(C,4)$.
PROPRIÉTÉ

> Si $a+b+c \neq 0$, les coordonnées du barycentre de $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$ dans un repère sont telles que :
> $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$ et $y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$

DÉFINITION

On appelle **isobarycentre** de trois points A, B et C, le barycentre de ces trois points pondérés par un même coefficient. Il s'agit en fait du **centre de gravité** du triangle ABC (si les trois points sont distincts).

3 Théorème du barycentre partiel - construction du barycentre de trois points

PROPRIÉTÉ

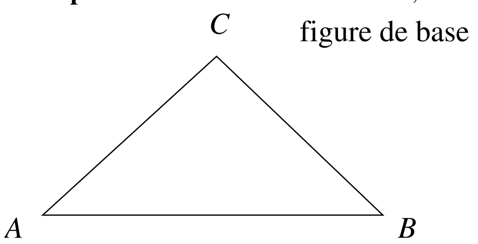
Etant donné trois points A, B, C et trois réels a, b et c tels que $a+b+c \neq 0$ et $b+c \neq 0$.
Si on note G_1, le barycentre de $(B,b)\,(C,c)$ alors le barycentre G de $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$ est aussi le barycentre de $(A,a)\,(G_1,b+c)$.

$$G = \text{barycentre}(A,a)\,\underbrace{(B,b)\,(C,c)}$$

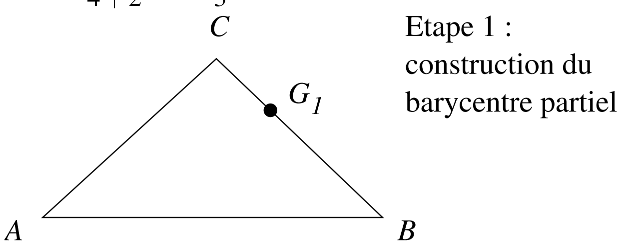
$$G = \text{barycentre}(A,a)\,(G_1,b+c)$$

On peut donc «remplacer» deux points pondérés d'un système par leur barycentre (dit «partiel») affecté de la somme de leurs coefficients

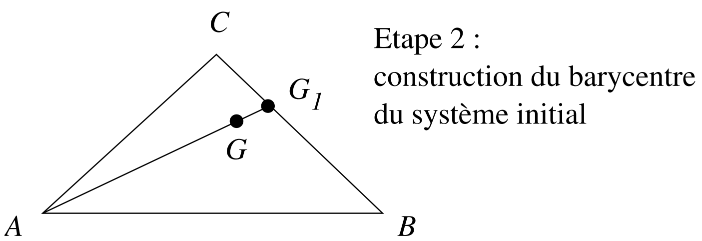
Application à la construction du barycentre de trois points :
D'après le principe ci-dessus, cela revient à construire deux barycentres de deux points.
Exemple : On cherche à construire G, le barycentre de $(A,1)\,(B,2)\,(C,4)$ sur la figure ci-dessous :



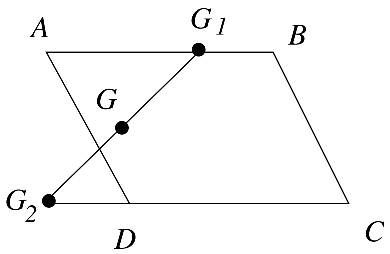
1) On construit G_1, le barycentre partiel de $(B,2)\,(C,4)$. D'après la formule de construction du barycentre de deux points, on a $\overrightarrow{BG_1} = \dfrac{4}{4+2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



2) D'après la propriété du barycentre partiel, on peut «remplacer» dans le système $(B,2)\,(C,4)$ par $(G_1,2+4)$. Donc, G est en fait le barycentre de $(A,1)\,(G_1,6)$. D'après la formule de construction du barycentre de deux points, on a $\overrightarrow{AG} = \dfrac{6}{1+6}\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{6}{7}\overrightarrow{AG_1}$.



Remarque : ce principe s'applique aussi aux barycentres de quatre points pondérés.
Exemple : pour construire G, le barycentre de $(A,1)\,(B,2)\,(C,-1)\,(D,4)$, on peut commencer par déterminer G_1, le barycentre partiel de $(A,1)\,(B,2)$ et G_2, le barycentre partiel de $(C,-1)\,(D,4)$.
On a donc $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CD}$.
En «remplacant» dans le système $(A,1)\,(B,2)$ par $(G_1,1+2)$ et $(C,-1)\,(D,4)$ par $(G_2,-1+4)$, on en déduit que G est aussi le barycentre de $(G_1,3)\,(G_2,3)$ (c'est à dire le milieu de $[G_1G_2]$.



4 Réduction de sommes vectorielles à l'aide de barycentres

Un des principaux intérêts des barycentres est de les utiliser pour réduire des sommes de vecteurs grâce à la propriété suivante :
PROPRIÉTÉ

- Si $a+b \neq 0$ alors pour tout point M, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre de $(A,a)\,(B,b)$.
- Si $a+b+c \neq 0$ alors pour tout point M, $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre de $(A,a)\,(B,b)\,(C,c)$.

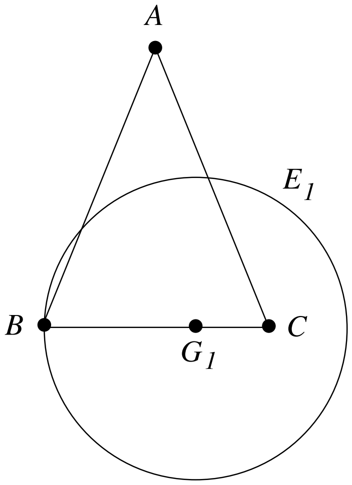
Exemple :
Si on veut réduire la somme $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}$, on introduit G le barycentre de $(A,2)\,(B,-3)\,(C,6)$.
On a alors, $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MC}=(2-3+6)\overrightarrow{MG}=5\overrightarrow{MG}$.

Remarque : Si la somme des coefficients est nulle, on ne peut plus utiliser un barycentre. Mais en utilisant la relation de Chasles, on peut montrer que la somme de vecteurs est en fait indépendante du point M.
Exemple : $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MA}-5\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

5 Recherche de lieux géométriques

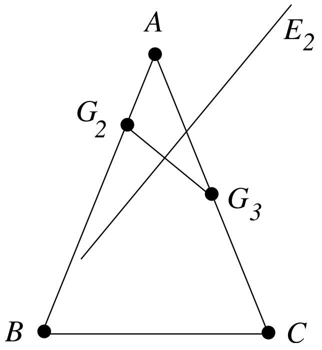
En utilisant les réductions de sommes vectorielles vues au paragraphe précédent, on peut facilement en déduire la nature de certains lieux géométriques.

Exemple : ABC est un triangle dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.
a) Déterminons l'ensemble E_1 des points M tels que $\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=6\,\text{cm}$.
Pour réduire la somme vectorielle, on pense à utiliser G_1, le barycentre de $(B,1)\,(C,2)$ (que l'on construit avec $\overrightarrow{BG_1}=\dfrac{2}{2+1}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$).
Alors, pour tout point M, $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(1+2)\overrightarrow{MG_1}=3\overrightarrow{MG_1}$.
E_1 est donc l'ensemble des points M tels que $\|3\overrightarrow{MG_1}\|=6\,\text{cm} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\|=2\,\text{cm}$.
On en déduit que E_1 est le cercle de centre G_1 et de rayon 2 cm.



b) Avec le même triangle, déterminons maintenant l'ensemble E_2 des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=2\,\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$.

Si on note G_2 le barycentre de $(A,3)\,(B,1)$ alors pour tout point M, $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(3+1)\overrightarrow{MG_2}=4\overrightarrow{MG_2}$.
(G_2 est construit avec $\overrightarrow{AG_2}=\dfrac{1}{3+1}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$)
Si on note G_3 le barycentre de $(A,1)\,(C,1)$ alors pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=(1+1)\overrightarrow{MG_3}=2\overrightarrow{MG_3}$.
(G_3 est l'isobarycentre de A et C, c'est à dire le milieu de $[AC]$)
E_2 est donc l'ensemble des points M tels que $\|4\overrightarrow{MG_2}\|=2\,\|2\overrightarrow{MG_3}\|\Leftrightarrow\|\overrightarrow{MG_2}\|=\|\overrightarrow{MG_3}\|$.
On en déduit que E_2 est la médiatrice de $[G_2G_3]$.



6 Comment montrer que trois points sont alignés à l'aide de barycentres ?

Principe général : pour prouver que trois points sont alignés il suffit de montrer que l'un peut s'exprimer comme un barycentre des deux autres (en utilisant la propriété du barycentre partiel dans tous les sens).

Les exercices basés sur cette méthode demandent une bonne maîtrise des barycentres partiels et une bonne observation de l'énoncé.

Exemple : Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, K le barycentre de $(A,1)\,(C,2)$ et J le milieu de $[IC]$.
Il va s'agir de montrer que les points B, K et J sont alignés.

1) Recherche empirique du point dont on va montrer que c'est un barycentre des deux autres :
B étant un point de la figure de base, il sera a priori plus difficile de l'exprimer comme barycentre des points K et J qui ont été rajoutés après.
Cela nous laisse le choix entre K et J.

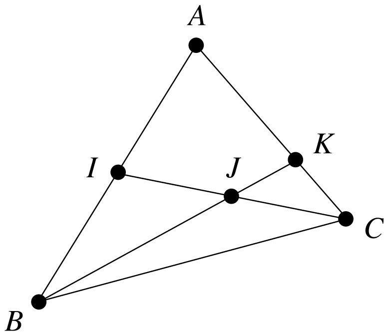
2) Solution en partant de J et donc en cherchant à l'écrire comme barycentre de B et K :
Recherche :
D'après l'énoncé, J est l'isobarycentre de I et C et I est aussi l'isobarycentre de A et B. Donc, d'après la propriété du barycentre partiel, on peut remplacer $(A,1)\,(B,1)$ par $(I,2)$ dans un système. L'idée est donc de partir en disant que J est le barycentre de $(I,2)\,(C,2)$.

Rédaction :
J milieu de $[IC]\Leftrightarrow J$ barycentre de $(I,2)\,(C,2)$.
I milieu de $[AB]\Leftrightarrow I$ barycentre de $(A,1)\,(B,1)$.
Donc, J est aussi le barycentre de $(A,1)\,(B,1)\,(C,2)$ (on «remplace» $(I,2)$ par $(A,1)\,(B,1)$).
Or, K est le barycentre de $(A,1)\,(C,2)$, on peut donc «remplacer» $(A,1)\,(C,2)$ dans le système par $(K,3)$.
On en déduit que J est le barycentre de $(K,3)\,(B,1)$ et donc que les points B, K et J sont alignés.

3) Solution en partant de K (moins naturelle) :
K est défini comme le barycentre de $(A,1)\,(C,2)$. Il faut essayer de faire apparaître B et J.
Comme aucune solution naturelle n'apparaît, on utilise l'astuce suivante pour forcer l'apparition du point B :
On va écrire que K est aussi le barycentre de $(A,1)\,(B,1)\,(B,-1)\,(C,2)$.
(Attention : ce n'est plus la propriété du barycentre partiel, mais cela est vrai car $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$. Ce genre d'astuce est très pratique pour forcer l'apparition d'un point. Il suffit que la somme des coefficients soit nulle pour conserver l'équivalence)

Comme I est le milieu de $[AB]$, on va pouvoir maintenant «remplacer» $(A,1)\,(B,1)$ par $(I,2)$.

Donc, K est aussi le barycentre de $(I,2)\,(B,-1)\,(C,2)$.
Il suffit maintenant de «remplacer» $(I,2)\,(C,2)$ par $(J,4)$ car J est le milieu de $[IC]$.
On obtient finalement que K est le barycentre de $(J,4)\,(B,-1)$ et donc que les points B, K et J sont alignés.



7 Comment montrer que trois droites sont concourantes à l'aide d'un barycentre ?

Principe général : pour prouver que les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes, il suffit de montrer qu'un certain point G peut-être obtenu comme un barycentre de A et B, puis comme un barycentre de C et D et enfin comme un barycentre de E et F (cela prouve en effet que G appartient aux trois droites).

Exemple : Soit ABC un triangle, P le barycentre de $(A,1)\,(C,2)$, Q le barycentre de $(A,2)\,(B,1)$ et R le barycentre de $(B,1)\,(C,4)$. Il s'agit de montrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

Recherche :
Toute l'astuce consiste à déterminer le point de concours G de ces trois droites.
G doit pouvoir s'écrire comme un barycentre de A et R. Or, R est lui-même un barycentre de B et C. Il peut donc paraître intéressant de chercher G comme barycentre des trois points A, B et C affectés de coefficients choisis de telle façon qu'en utilisant trois fois la propriété du barycentre partiel, on puisse montrer que c'est aussi un barycentre de A et R, de B et P et enfin de C et Q.
Pour R, il serait interessant d'avoir $(B,1)\,(C,4)$ (à un coefficient près).
Pour P, il faudrait avoir $(A,1)\,(C,2)$ (à un coefficient près).
Et pour Q, il nous faudrait $(A,2)\,(B,1)$ (à un coefficient près).
Finalement, cela devrait marcher en définissant G comme barycentre de $(A,2)\,(B,1)\,(C,4)$.

Rédaction :
Soit G le barycentre de $(A,2)\,(B,1)\,(C,4)$.
R est le barycentre de $(B,1)\,(C,4)$, donc G est aussi le barycentre de $(A,2)\,(R,5)$. G est donc bien sur la droite (AR).
P est le barycentre de $(A,1)\,(C,2)$, donc celui aussi de $(A,2)\,(C,4)$. Ainsi, G est aussi le barycentre de $(P,6)\,(B,1)$, ce qui prouve qu'il appartient à la droite (PB).
Q est le barycentre de $(A,2)\,(B,1)$, donc G est aussi le barycentre de $(Q,3)\,(C,4)$. G est donc bien aussi sur la droite (QC).
Le point G appartient aux trois droites, ce qui prouve qu'elles sont bien concourantes.