Activité 4

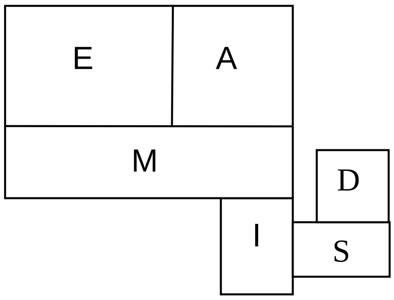
Coloration d'un graphe : nombre chromatique

1. Deux problèmes

Problème 1 :

Voici la carte de 6 pays notés A, E, M, I, S et D.

On veut colorer cette carte de sorte que deux pays frontaliers aient des couleurs différentes. Combien faut-il au minimum de couleurs ?



Problème 2 :

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières optionnelles : Français, Anglais, Mécanique, Dessin industriel, Informatique et Sport. Les profils des candidats à options multiples sont {Français, Anglais, Mécanique}, {Dessin industriel, Sport}, {Informatique, Sport} et {Mécanique, Informatique}.
Une épreuve occupe une demi-journée.
Déterminer le nombre minimal de demi-journées nécessaires au passage de ces options.

Construire un graphe correspondant au problème 1 puis au problème 2 (en reliant, dans ce cas, deux matières si elles ont été choisies par un même candidat).
Que constate-t-on ?

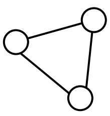
Dans le graphe du problème 1, pourquoi peut-on affirmer qu'il faudra au moins trois couleurs ? Colorier alors les sommets du graphe.
La résolution du problème 1 permet de répondre au problème 2 (c'est à dire que ces problèmes sont mathématiquement les mêmes). Pourquoi ?

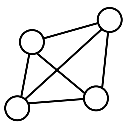
---

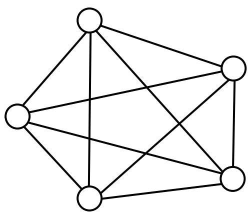
2. Vocabulaire

- **Colorer** un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de façon à ce que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
- Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.
- Si le graphe est noté G son nombre chromatique est noté $\gamma(G)$.

Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants.







- Un graphe est dit **complet** si tous ses sommets sont adjacents 2 à 2.

Que dire du nombre chromatique d'un graphe complet ?

3. Une propriété importante

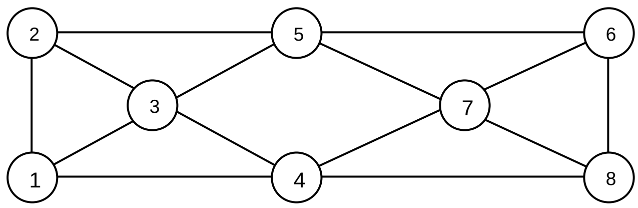
> Soit un graphe G. S'il existe un sous graphe de G complet d'ordre p alors le nombre chromatique $\gamma(G)$ de G vérifie la relation $\gamma(G) \geq p$.

Pourquoi ?

4. L'algorithme glouton (Welsh et Powel) : un algorithme pour colorer mais qui n'est pas toujours performant

a) On considère le graphe ci-contre.

Déterminer le degré de chaque sommet et ranger dans le tableau ci-dessous les sommets par ordre de degrés décroissants. (peu importe les ex aequo)



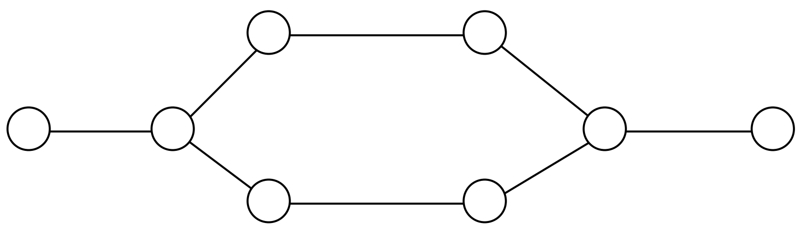
Sommets par degrés décroissants	3							
Couleur attribuée	C_1							

Étape 1 : On attribue la couleur C_1 au premier sommet de la liste.
Étape 2 : Puis, en suivant la liste, on attribue cette couleur C_1 **à tous les sommets qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.**
Étape 3 : On attribue une deuxième couleur au premier sommet non coloré et on recommence comme à l'étape 2.

Appliquer l'algorithme. Le nombre de couleur trouvé est-il minimal ?

b) Attention à l'algorithme glouton !

Appliquer l'algorithme glouton au graphe suivant et montrer que l'on peut faire mieux !



5. Théorème (admis)

> Soit G un graphe. Soit Δ le plus grand des degrés.
> Alors le nombre chromatique $\gamma(G)$ est inférieur ou égal à $\Delta + 1$; soit $\gamma(G) \leq \Delta + 1$.

Ce théorème associé à la propriété importante ci dessus permet parfois de déterminer le nombre chromatique.

Il faut aussi remarquer qu'il peut exister plusieurs coloriages d'un graphe dont le nombre de couleurs est égal au nombre chromatique.

Exercice 1

On veut implanter 7 stations radio dans 7 endroits dont les distances mutuelles (en Km) sont données dans le tableau. Deux stations interfèrent si et seulement si elles sont à moins de 100 Km l'une de l'autre. Déterminer le nombre minimal de longueurs d'ondes qu'il faut prévoir pour éviter les interférences.

	B	C	D	E	F	G
A	55	110	108	60	150	88
B		87	142	133	98	139
C			77	91	85	93
D				75	114	82
E					107	41
F						123

Exercice 2

SI un graphe contient une chaîne eulérienne ne passant pas deux fois par le même sommet, que dire du nombre chromatique ?
Que dire de la réciproque ?