CHAPITRE 5 : Les fonctions

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de base sur les fonctions. Les fonctions sont une partie extrêmement importante pour le programme du lycée (et après d'ailleurs…).
Ce chapitre est largement inspiré du livre de cours dont dispose les élèves.

-I- Généralités sur les fonctions.

De premier abord, les fonctions font peur aux élèves. D'ailleurs, il est vrai que les premières définitions ne sont pas faciles à digérer. C'est seulement peu après, à l'aide d'exemples, que la compréhension apparaît.
Historiquement également, la notion de fonction a posé beaucoup de problèmes…..

-1- Définition d'une fonction.

Définition 1 :

1) *Une fonction f est un procédé qui permet d'associer à tout nombre réel x, appartenant à un ensemble E, un unique nombre réel noté $f(x)$.*
2) *Le nombre réel $f(x)$ est appelé l'image de x par la fonction f.*
3) *x est appelé un antécédent de $f(x)$ par la fonction f.*
4) *E est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.*

Remarque : Il est important de tout de suite remarquer que l'image d'un nombre réel x par une fonction f est unique alors qu'un nombre réel $f(x)$ peut posséder plusieurs antécédents.

Notation : Il est d'usage de noter une fonction sous la forme suivante :

$$f: \quad E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Donnons tout de suite un exemple.

Exemple : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - 2x$.
C'est à dire que l'on note

$$f: \quad [-3;5] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 2x \,*$$

Alors :

- $[-3;5]$ est l'ensemble de définition de la fonction f.
- L'image de 1 par f est égale à $f(1) = 1^2 - 2\times 1 = -1$.
- Le nombre réel 0 possède deux antécédents qui sont 0 et 2 car on a $f(0) = f(2) = 0$.

On voit alors que cet exemple illustre bien la remarque précédente.
Remarque : La fonction de l'exemple précédent aurait pu être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. D'une manière plus générale, on peut définir une fonction f sur l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ puisse être calculé par la formule donnée. Nous verrons par exemple qu'il faut éviter les divisions par 0 …..

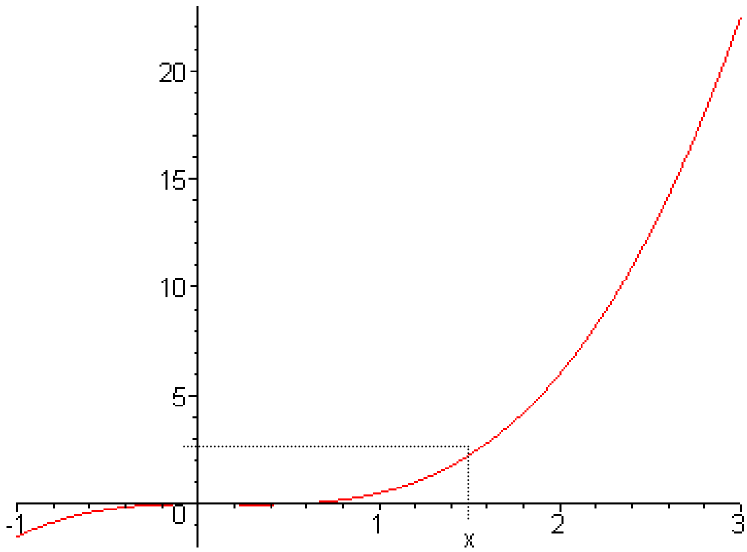
Exemple : Considérons la fonction f définie sur E par $f(x)=\sqrt{x}$. Alors, nous pouvons prendre pour E toute partie de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun nombre négatif.

-2- <u>Courbe représentative d'une fonction</u>.

Le plan est muni d'un repère $(O;I,J)$ que l'on supposera en général orthogonal ou orthonormé (voir au besoin le chapitre 7). On considère une fonction f définie sue une partie E de $\mathbb{R}$.

Définition 2 : *On appelle courbe représentative, ou représentation graphique, de la fonction f l'ensemble des points M de coordonnées $(x;f(x))$ avec $x \in E$. On note généralement C_f la courbe représentative d'une fonction f.*

Par exemple, soit f une fonction définie sur $[-1;3]$ dont la courbe représentative est donnée par :



Etant donné un nombre réel x, on lit la valeur de $f(x)$ en traçant la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(x;0)$ et la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de C_f d'abscisse x. Cette dernière droite vient couper l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;f(x))$.

Remarque : Lorsqu'une fonction est donnée par sa courbe représentative, son ensemble de définition est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.

Voyons maintenant un moyen pratique pour comparer deux fonctions.

Propriété 1 : *Comparaison de deux fonctions à l'aide de leur représentation graphique.*
On considère deux fonctions f et g définies sur un même ensemble E.

- *Dire que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in E$ équivaut à dire que C_f est au-dessus de C_g.*
- *Dire que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in E$ équivaut à dire que C_f est au-dessous de C_g.*

-3- Tableau de valeurs d'une fonction.

Définition 3 : *Un tableau de valeurs d'une fonction f est un tableau donnant la correspondance entre des valeurs de la variable x et les valeurs de son image $f(x)$ par f.*
Le pas d'un tableau de valeurs est un écart régulier entre deux valeurs successives de la variable.

Exemple : Soit f la fonction définie sue $[-2;3]$ par $f(x) = x^2 - 1$. Le tableau de valeurs de f avec un pas égal à 1 est donné par

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8

Remarque : Un tableau de valeur d'une fonction est souvent utilisé pour tracer la courbe représentative de cette fonction car il permet d'obtenir des points particuliers de cette courbe.

-II- Etude des variations d'une fonction.

-1- Sens de variation d'une fonction.

Définition 4 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle E de $\mathbb{R}$.*

1) *On dit que f est croissante sur E si f conserve le sens des inégalités. Ceci signifie que pour tout $a,b \in E$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$.*
2) *On dit que f est décroissante sur E si f change le sens des inégalités. Ceci signifie que pour tout $a,b \in E$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \geq f(b)$.*
3) *On définit de même les notions de fonctions strictement croissantes ou strictement décroissantes en utilisant des inégalités strictes.*

Nous verrons, là encore, de nombreux exemples en exercices.
Donnons maintenant deux méthodes pratiques pour déterminer le sens de variation d'une fonction.

Méthode 1 : *On utilise simplement la définition : on prend* a *et* b *dans* E *tels que* $a \leq b$ *puis on montre que* $f(a) \leq f(b)$ *ou que* $f(a) \geq f(b)$ *en utilisant les règles de calcul sur les inégalités vues au chapitre 2.*

Méthode 2 : *On prend cette fois-ci* a *et* b *dans* E *de sorte que* $b - a \geq 0$ *(ce qui revient à avoir* $a \leq b$ *) puis on montre que* $f(b) - f(a) \geq 0$ *ou que* $f(b) - f(a) \leq 0$ *en factorisant par* $b - a$ *et en utilisant les règles du produit des signes.*

Remarque : La seconde méthode est un peu plus délicate à mettre en œuvre mais elle a l'avantage de fonctionner à tous les coups. Ceci est important pour les fonctions définies par des fractions ou des trinômes du second degré.

-III- Tableau de variation d'une fonction.

On considère une fonction f définie sur E. Pour résumer l'étude des variations de f, nous allons utiliser ce que l'on appelle un *tableau de variation*.

Définition 5 : *Voici les différentes étapes pour la construction du tableau de variation de la fonction* f.

1) *On décompose* E *en plusieurs intervalles sur lesquels* f *garde le même sens de variation (croissante ou décroissante).*
2) *Sur la première ligne du tableau, on fait figurer les bornes de ces différents intervalles.*
3) *Sur la seconde ligne du tableau, on signale d'une flèche*
   - *montante que la fonction est croissante sur un intervalle* I *de* E.
   - *descendante que la fonction est décroissante sur un intervalle* I *de* E.
   - *horizontale que la fonction est constante sur un intervalle* I *de* E.
4) *Sur la seconde ligne, on note également les valeurs prises par* f *aux bornes des différents intervalles de* E.

Exemple : On considère $E = [3;6]$ et f définie sur E telle que :

- f soit croissante sur $[3;5]$.
- f soit décroissante sur $[5;6]$.
- $f(3) = 1$, $f(5) = 4$ et $f(6) = 0$.

Le tableau de variation de f est alors (voir la page suivante)

x	3		5		6
f			4		
		↗		↘	
	1				0

-4- <u>Maximum et minimum d'une fonction</u>.

Maintenant que nous savons trouver les variations d'une fonction, il est naturel de s'intéresser au minimum et au maximum des valeurs que peut prendre une fonction.

Définition 6 : *Soit f une fonction définie sur E.*
1) *f admet un maximum en $x_0 \in E$ lorsque l'on a $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in E$. Le nombre réel $M = f(x_0)$ est alors le maximum de f sur E.*

2) *f admet un minimum en $x_0 \in E$ lorsque l'on a $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$. Le nombre réel $m = f(x_0)$ est alors le minimum de f sur E.*
3) Le maximum et le minimum de f sont appelés les extremums de f.

Remarque : il faut faire attention au fait qu'une fonction n'admet pas toujours de maximum ou de minimum. On se reportera aux exercices.

-5- <u>Comment montrer qu'une fonction admet un extremum ?</u>

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur $[a;b]$ et soit $x_0 \in [a;b]$.
Si f est croissante sur $[a;x_0]$ et décroissante sur $[x_0;b]$, alors f admet un maximum en x_0 qui est égal à $f(x_0)$.

Démonstration : Prenons $x \in [a;b]$.Il y a alors deux possibilités :

- Ou bien nous avons $x \in [a;x_0]$: dans ce cas, comme f est croissante sur $[a;x_0]$ et comme $x \leq x_0$, il s'ensuit que $f(x) \leq f(x_0)$ car f conserve le sens des inégalités.
- Ou bien nous avons $x \in [x_0;b]$: dans ce cas, comme f est décroissante sur $[x_0;b]$ et comme $x_0 \leq x$, il s'ensuit que $f(x) \leq f(x_0)$ car f inverse le sens des inégalités.

Ainsi, dans tous les cas de figure, nous avons que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in [a;b]$. Ceci veut bien dire que la fonction f admet un maximum en x_0 égal à $f(x_0)$.

■

Propriété 2 : Soit f une fonction définie sur $[a;b]$ et soit $x_0 \in [a;b]$.
Si f est décroissante sur $[a;x_0]$ et croissante sur $[x_0;b]$, alors f admet un minimum en x_0 qui est égal à $f(x_0)$.

Démonstration : On procède exactement de la même manière que pour la démonstration précédente. Prenons donc $x \in [a;b]$.

- Si $x \in [a;x_0]$: alors on a $f(x_0) \leq f(x)$ car f est décroissante sur $[a;x_0]$ et car $x \leq x_0$.
- Si $x \in [x_0;b]$: alors on a $f(x_0) \leq f(x)$ car f est croissante sur $[x_0;b]$ et car $x_0 \leq x$.

Dans tous les cas ce figures, nous avons bien que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, ce qui démontre bien le résultat souhaité.

▪

Propriété 3 : Soit f une fonction définie sur $[a;b]$ et soit $x_0 \in [a;b]$.
1) Si $f(x_0) - f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors f admet un maximum en x_0 qui est égal à $f(x_0)$.
2) Si $f(x_0) - f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors f admet un minimum en x_0 qui est égal à $f(x_0)$.

La démonstration de ce résultat est immédiate en utilisant le lien entre inégalités et signe de la différence (voir le chapitre 2).

Exemple : Pour montrer que $f(x) = -x^2 + 4x$ admet un maximum en $x_0 = 2$ sur $\mathbb{R}$, nous allons utiliser cette troisième propriété. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} f(2) - f(x) &= 4 - (-x^2 + 4x) \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

Un carré de nombres réels étant toujours positif, nous pouvons alors en déduire que $f(2) - f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en $x_0 = 2$ qui est égal à $f(2) = 4$.

Remarque : Bien sûr, pour utiliser ces propriétés, il faut connaître à l'avance la valeur du nombre réel x_0. Vous verrez en première que pour une fonction trinôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, nous prendrons toujours $x_0 = -\frac{b}{2a}$.