LOGARITHME NEPERIEN

A une époque (fin du XVI et début du XVII[e] siècle) ou les calculs liés au développement de l'astronomie et à l'explosion de l'économie sont de plus en plus fastidieux, l'astronome Ecossais John Napier (ou Neper) (1550 – 1617) met au point un algorithme qui transforme les multiplications en additions et les divisions en soustractions. Il propose une table numérique qui a été utilisée jusqu'à l'apparition des premières machines à calculer ! Cette fonction intervient dans de nombreux domaines comme la modélisation des phénomènes de perception ; en effet, une loi psychophysique, dite de Weber-Fechner, énonce que « la sensation perçue est proportionnelle au logarithme de la valeur existante ». Ceci explique par exemple que l'échelle des décibels pour les sons ou celle de Richter pour les séismes soient logarithmique. La loi de Benford (1938) repose sur cette fonction ; elle permet grace aux probabilités de déterminer des fraudes comptables, mais aussi de minimiser la place de stockage des informations ou d'optimiser les débits dans un ordinateur. En chimie, la mesure de l'acidité d'un liquide est indiquée par le pH qui est gradué selon une échelle logarithmique.

1. Fonction logarithme népérien

1.1. La fonction *ln*

f est la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$. Cette fonction usuelle est continue et admet des primitives sur $\left]0;+\infty\right[$.

Définition 1 :
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $\left]0;+\infty\right[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Remarques :
i. Le logarithme népérien d'un réel $x > 0$ est noté $\ln\left(x\right)$ ou $\ln x$.
ii. L'ensemble de définition de la fonction ln est $\left]0;+\infty\right[$.
iii. Avec les notations du calcul intégral, pour tout $x > 0$, $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

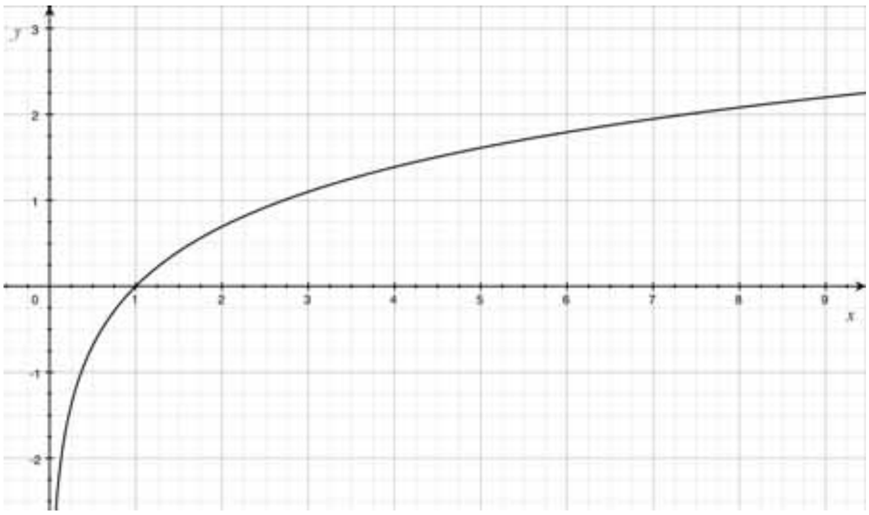
1.2. Premières conséquences

Théorème 1 :
i. $\ln 1 = 0$.
ii. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

iii. Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

1.3. Sens de variation et équations, inéquations

Courbe représentative de la fonction ln :



De la stricte croissance de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$ découle immédiatement les propriétés qui suivent :

Propriété 1 : Pour tous réels a et b strictement positifs :
i. $\ln a > \ln b$ *si et seulement si* $a > b$.
ii. $\ln a = \ln b$ *si et seulement si* $a = b$.

Propriété 2 : Pour tout réel $x > 0$:
i. $\ln x = 0$ *si et seulement si* $x = 1$.
ii. $\ln x < 0$ *si et seulement si* $0 < x < 1$.
iii. $\ln x > 0$ *si et seulement si* $x > 1$.

Remarque : Il est donc fondamental, pour résoudre une équation du type $\ln u(x) = \ln v(x)$ ou une inéquation du type $\ln u(x) \leq \ln v(x)$ (et les autres !) de déterminer l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

Exemples :
i. Résolution de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$.
On cherche les réels x tels que $x^2 - 4 > 0$ et $3x > 0$.
Or $x^2 - 4 > 0$ pour $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ et $3x > 0$ pour $x > 0$.
Ainsi, l'équation n'a de sens (*ie* peut être résolue) que dans l'ensemble $]2;+\infty[$. Dans cet ensemble, résoudre $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ revient à résoudre $x^2 - 4 = 3x$ *ie* $x^2 - 3x - 4 = 0$. Cette dernière équation

admet comme solutions –1 et 4. Or $-1 \notin]2;+\infty[$ et $4 \in]2;+\infty[$. Donc la seule solution de l'équation $\ln\left(x^2-4\right)=\ln\left(3x\right)$ est 4.

ii. Résoudre l'inéquation $\ln\left(2x+4\right) \geq \ln\left(6-2x\right)$. On cherche les réels x tels que $2x+4>0$ et $6-2x>0$, *c'est à dire* tels que $x > -2$ et $x < 3$. L'inéquation doit donc être résolue dans l'ensemble $]-2;3[$. Dans cet ensemble, résoudre $\ln\left(2x+4\right) \geq \ln\left(6-2x\right)$ revient à résoudre $2x+4 \geq 6-2x$ qui équivaut à $x \geq \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est donc $]-2;3[\cap \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ *ie* $\left[\frac{1}{2};3\right[$.

iii. Résoudre l'équation $\ln\left(2x-4\right)=0$. On cherche les réels x tels que $2x-4>0$ *c'est à dire* tels que $x > 2$. Dans l'intervalle $]2;+\infty[$, l'équation $\ln\left(2x-4\right)=0$ équivaut à $2x-4=1$ *ie* $x=\frac{5}{2}$. Ce nombre appartient à $]2;+\infty[$ donc il est solution.

iv. Résoudre l'inéquation $\ln\left(x-10\right)<0$.

$\ln\left(x-10\right)<0$ équivaut à $0<x-10<1$ *c'est à dire* $10 < x < 11$. L'ensemble solution de cette inéqution est donc $]10;11[$.

2. Propriétés algébriques

2.1. Logarithme d'un produit

Théorème 2 : *fondamental !*
Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Preuve : Soit a un réel strictement positif fixé et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f\left(x\right)=\ln ax - \ln x$. Pour tous réels $x > 0$: $f'\left(x\right)=\frac{a}{ax}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$. Donc f est une fonction constante sur $]0;+\infty[$. Or $f\left(1\right)=\ln a-\ln 1=\ln a$, donc pour tous réels $x > 0$, $f\left(x\right)=\ln a$ *c'est à dire* $\ln ax - \ln x = \ln a$, soit $\ln ax = \ln a + \ln x$. D'où la conclusion en remplaçant x par b.

Remarque : Cette propriété se généralise au cas d'un produit de trois, quatre, … facteurs.

Exemple : Simplifier l'expression $\ln 8 + \ln 10 + \ln \frac{1}{40}$.

2.2. Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Théorème 3 : Pour tous réels a et b strictement positifs,

i. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

ii. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Preuve :

i. Pour tout réel $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ et $\frac{1}{a} \times a = 1$;

donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$ *équivaut à* $0 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$. Donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

ii. Pour tous réels a et b strictement positifs,

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

2.3. Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Théorème 4 : Pour tous réels $a > 0$,

i. $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$, pour tout entier relatif n.

ii. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Preuve :

i. Utilisation de proche en proche du théorème 2.

ii. Pour tous réels $a > 0$, $\sqrt{a}^2 = a$ donc $\ln\left(\sqrt{a}^2\right) = \ln a$, *c'est à dire* $2 \ln \sqrt{a} = \ln a$ d'où $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Exemples :

i. Simplifier, pour tout réel $x > 0$, l'expression $\ln 3x - \ln 3$.

ii. Simplifier les expressions : $\ln \frac{3}{4} + \ln \frac{8}{3} - \ln 2^3$; $\ln 7^{-3} + 2 \ln 49$ et $4 \ln 25 - 2 \ln \sqrt{5}$.

3. Etude de la fonction ln

3.1. Etude de la limite en +∞

Théorème 5 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$**.**

Preuve : admis…

3.2. Etude de la limite en 0

Théorème 6 : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Preuve : D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\ln X\right) = -\infty$.

Remarque : L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction logarithme.

Exemples : Recherche de la limite en $+\infty$.

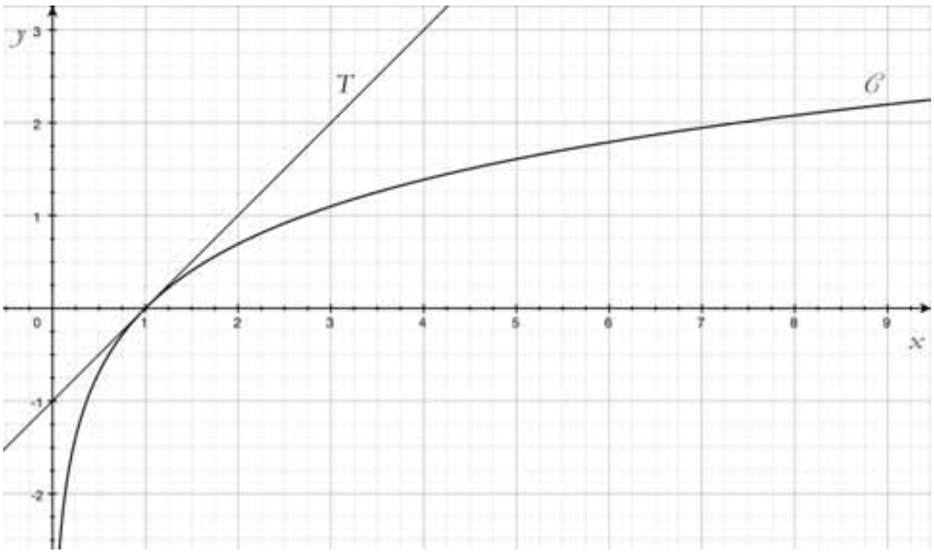
i. Pour tous réels $x > 3$, $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 1\right)$. $f = u \circ v$ avec $v(x) = x^2 - 3x + 1$ et $u(x) = \ln x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ii. Pour tous réels $x > -\dfrac{1}{2}$, $g(x) = \ln(2x+1) - \ln(x+3)$. On remarque que $g(x) = \ln\dfrac{2x+1}{x+3}$. $g = u \circ v$ avec $v(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ et $u(x) = \ln x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2} \ln x = \ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ln 2$.

3.3. Tableau de variation

On peut rassembler quelques résultats vus précédement dans le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$\ln' x$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



T est la tangente à la courbe *C* représentative de la fonction ln au point *A* d'abscisse 1.

Une équation de *T* est $y = x - 1$ (en effet $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$).

On établit que la courbe *C* est au dessous de la tangente *T* sur $]0;+\infty[$ et donc, que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

3.4. Quelques limites particulières

Théorème 7 :

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Preuve :

i. *f* est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$.

Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$. Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-\sqrt{x}$. La fonction *f* est donc croissante sur $]0;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$. Le maximum de cette fonction vaut $f(1) = -2$; donc pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$, *c'est à dire* $\ln x < 2\sqrt{x}$, d'où $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Or, pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

ii. Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$. Alors $x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$.

D'où $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X} \right) = 0$

Remarque : On dit, pour ces deux formes indéterminées, que « x l'emporte sur $\ln x$ ».

Théorème 8 :

i. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

Preuve :

i. D'après la définition du nombre dérivé, on a :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

ii. Immédiat en posant $X = x + 1$.

Exemples :

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^3)}{5x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\ln(x)}{5x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{5x} \times \frac{\ln x}{x} \right)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{5x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^3)}{5x^2} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} (3x^3 \ln x^4) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^3 \times 4 \ln x) = \lim\limits_{x \to 0} (12x^2 \times x \ln x)$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} (12x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} (3x^3 \ln x^4) = 0$.

iii. $\lim\limits_{x \to 1} \left(3 \ln x \times \frac{x + 1}{x^2 - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \left(3 \frac{\ln x}{x - 1} \right) = 3 \times 1 = 3$.

4. L'équation ln(x) = m

4.1. L'équation ln(x) = m

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

Théorème 9 :

Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.

4.2. Le nombre e

En particulier pour m = 1, l'équation l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On la note e. (Notation due à Euler en 1728, il montre que cette valeur est un irrationnel). A la calculatrice e $\approx$ 2,718.

4.3. Le nombre e^m pour un réel m quelconque

Théorème 10 :
Pour tout entier relatif n, $\ln\left(e^n\right) = n$.

Preuve : $\ln\left(e^n\right) = n \times \ln e = n \times 1 = n$.

Remarques :
i. De façon plus générale, pour m un réel quelconque, on a :
$\ln\left(e^m\right) = m$.
ii. Cela revient à dire que l'on note e^m l'unique solution de l'équation $\ln x = m$.

Exemples :
i. La solution de $\ln x = 2$ est e^2.
ii. La solution de $\ln x = -1$ est $e^{-1} = \frac{1}{e}$.
iii. La solution de $\ln x = \frac{1}{2}$ est $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. En effet $\ln\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$.
iv. Résoudre l'équation $\left(\ln x\right)^2 - 3\ln x - 4 = 0$. En posant $X = \ln x$, cette équation devient $X^2 - 3X - 4 = 0$ qui admet comme racines -1 et 4. On résout alors les équations : $\ln x = -1$ et $\ln x = 4$; les deux solutions de l'équation sont donc e^{-1} et e^4.

5. Fonction ln u

u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

5.1. Limites

Pour étudier une limite d'une fonction $\ln u$, on utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

Exemple : f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f\left(x\right) = \ln\left(x^2 - 1\right)$.
$\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 - 1\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(x^2 - 1\right) = -\infty$.

5.2. Sens de variation

Théorème 11 :
Les fonctions u et $\ln u$ ont même sens de variation sur l'intervalle I.

Preuve : La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$. D'après le théorème sur les variations de fonctions composées, u et $\ln u$ ont même sens de variation sur I.

Exemple : La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ définie sur $]-\infty;1[$ est décroissante sur ce même intervalle car la fonction $x \mapsto 1-x$ est décroissante sur $]-\infty;1[$.

5.3. Dérivée et primitives

Théorème 12 : Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Preuve : La fonction u est dérivable sur I et la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$. D'après le théorème sur la dérivation d'une fonction composée, $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u(x))' = \ln'[u(x)] \times u'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$; donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Théorème 13 : u est une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I. Alors, une primitive sur I de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est la fonction :

i. $x \mapsto \ln[u(x)]$ si $u(x) > 0$ sur I ;

ii. $x \mapsto \ln[-u(x)]$ si $u(x) < 0$ sur I.

Preuve : par lecture inverse de la formule de dérivée…

Remarque : Il est judicieux de retenir qu'une primitive sur I de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u(x)|$.

Exemples :

i. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x^3}{x^4+2}$ se présente sous la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 2$. Or, pour tout réel *x*, $x^4 + 2 > 0$, donc une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(x^4+2)$.

ii. Une primitive sur $]-\infty;0[$ de la fonction $\dfrac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln(-x)$.

6. La fonction logarithme décimal

Définition 2 : La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarques :
i. Ainsi, $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$.
ii. Pour tout entier *n*, $\log(10^n) = n$.
iii. En posant $k = \dfrac{1}{\ln 10}$, on a $\log x = k \ln x$; ceci a pour conséquence importante que toutes les propriétés de la fonction log sont identiques à celles de la fonction ln.