On entend par domaine un intervalle ou une réunion d'intervalles.

On rapporte le plan à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f une fonction définie sur un domaine I. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans ce repère.

1 Rappels de cours

1.1 Domaine centré en zéro

Définition 1.1 On dit qu'un domaine I est *centré en zéro* (ou symétrique par rapport à zéro) si :

$$\text{pour tout } x \text{ de } I,\ (-x) \in I$$

Autrement dit, un domaine est centré en zéro si tout élément de ce domaine a son opposé dans ce domaine (0 a pour opposé lui-même).

1.2 Fonction paire

Par une fonction paire, un réel et son opposé ont même image.

Définition 1.2 On dit qu'une fonction f est *paire* si :

(i) I est centré en zéro.

(ii) pour tout x de I, $f(-x) = f(x)$.

Propriété 1.1 Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'*axe des ordonnées*.

1.3 Fonction impaire

Par une fonction impaire, un réel et son opposé ont des images opposées.

Définition 1.3 On dit qu'une fonction f est *impaire* si :

(i) I est centré en zéro.

(ii) pour tout x de I, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 1.2 Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'*origine du repère*.

2 Méthode et exemples

Si l'une de ces deux conditions n'est pas vérifiée, alors f n'est ni paire ni impaire.

Point méthode Pour étudier la parité d'une fonction :
① on vérifie que le domaine est centré en zéro ;
② on exprime $f(-x)$ et on le compare à $f(x)$.

Exemples. ① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}$ est centré en zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$.
f est donc paire.

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $g(x) = \frac{x+3}{x+1}$.
$1 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ mais $(-1) \notin \mathbb{R} - \{-1\}$ donc $\mathbb{R} - \{-1\}$ n'est pas centré en zéro.
g n'est donc ni paire ni impaire.

Inutile, dans ce cas, d'exprimer $g(-x)$.

③ Soit h la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $h(x) = x\sqrt{4-x^2}$.
On a :

$$x \in [-2;2] \iff -2 \leqslant x \leqslant 2 \iff -2 \leqslant -x \leqslant 2 \iff (-x) \in [-2;2]$$

$[-2\,;\,2]$ est centré en zéro.
Pour tout x de $[-2\,;\,2]$, $h(-x) = -x\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -h(x)$.
h est donc impaire.

Pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, on peut exhiber un contre-exemple bien choisi.

④ Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = x^2 + x + 1$.
$i(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$; $i(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$. On remarque, d'une part, que $i(-1) \neq i(1)$ donc i n'est pas paire, et, d'autre part, que $i(-1) \neq -i(1)$ donc i n'est pas impaire.