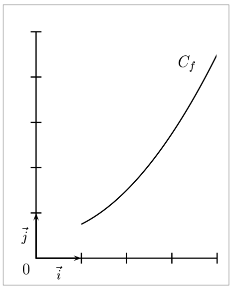
Limites : Résumé de cours et méthodes

1 Limite d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

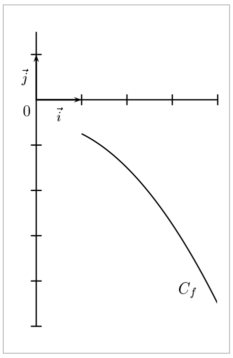
1-1 Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$

DÉFINITION

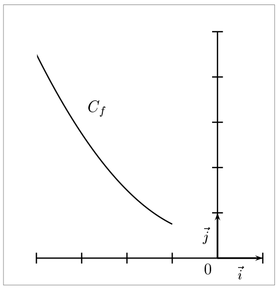
Soit f une fonction définie sur un intervalle admettant $+\infty$ comme borne supérieure.On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$) lorsqu'on peut toujours trouver un x assez grand pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



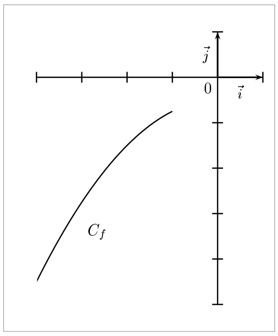
► **Remarque :** on définit de la même façon,



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

PROPRIÉTÉ

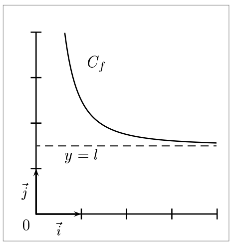
$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

1-2 Limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$

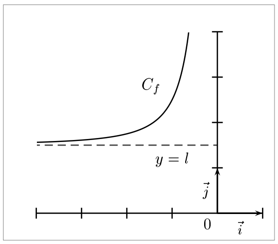
DÉFINITION

On dit qu'une fonction f a pour limite le réel l en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$) lorsqu'on peut toujours trouver un x assez grand pour que $f(x)$ soit aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.



On dit alors que la droite D d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

► **Remarque :** on définit de la même façon $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.



La droite D d'équation $y = l$ est dite asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$.

PROPRIÉTÉ

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

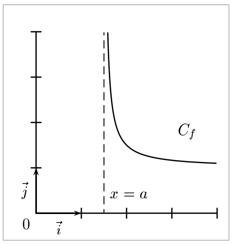
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

2 Limite d'une fonction en a (a réel)

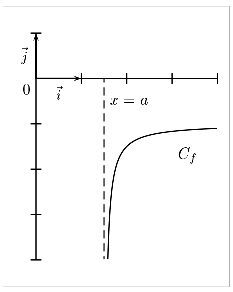
2-1 Limite infinie en a

DÉFINITION

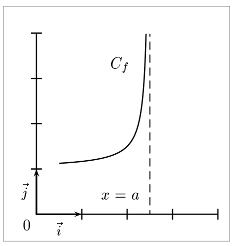
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,,b[$. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a (par valeurs supérieures) lorsqu'on peut toujours trouver un x assez proche de a ($x > a$) pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$.



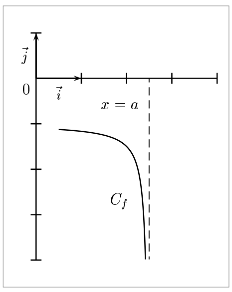
► **Remarque :** on définit de la même façon,



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$

Dans ces quatre cas, on dit que la droite D d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f.

PROPRIÉTÉ

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$

2-2 Limite finie en a

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a ou de borne a. On dit que f a pour limite le réel l en a lorsqu'on peut toujours trouver un x assez proche de a pour que $f(x)$ soit aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

PROPRIÉTÉ

Si f est définie en a et si f est la fonction racine carrée, ou une fonction polynome, ou une fonction rationnelle alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

► *Exemple :* : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x-3}{x^2+1} = \dfrac{4\times 0-3}{0^2+1} = -3$

3 Opérations sur les limites

On note **FI** (pour forme indéterminée) les cas où les théorèmes ne permettent pas de conclure.

3-1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	et si g a pour limite	alors $f+g$ a pour limite
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**FI**

► *Exemples :*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{x^3}_{\to-\infty} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\to\sqrt{0}=0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty} = +\infty$

3-2 Limite d'une produit

Si f a pour limite	et si g a pour limite	alors fg a pour limite
l	l'	ll'
$l\neq 0$	$+\infty$	(signe de l)∞
$l\neq 0$	$-\infty$	(signe de $-l$)∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	**FI**

▶ *Exemples :*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\underbrace{x^2}_{\to+\infty} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}-2\right)}_{\to-2} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$)

3-3 Limite de l'inverse

Si f a pour limite	alors $\dfrac{1}{f}$ a pour limite
$l \neq 0$	$\dfrac{1}{l}$
$\pm\infty$	0
0 (par valeurs $+$)	$+\infty$
0 (par valeurs $-$)	$-\infty$

▶ **Remarque :** Quand le dénominateur tend vers 0, il faut déterminer et justifier s'il le fait par valeurs positives ou négatives (on peut s'aider d'un tableau de signes).

▶ *Exemples :*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x+2} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+2 = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2 = 0^+$ $(x-2>0$,pour $x>2)$
- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2 = 0^-$ $(x-2<0$,pour $x<2)$

3-4 Limite d'un quotient

Pour étudier la limite de $\dfrac{f}{g}$, on écrit que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. On détermine alors la limite de f et de $\dfrac{1}{g}$, ce qui permet d'en déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$.

▶ *Exemples :*

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \underbrace{(x+1)}_{\to1} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x^2+3}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \underbrace{(x^2+3)}_{\to(-1)^2+3=4} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}_{+\infty} = +\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x+1 = 0^+$)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{1+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(2x^3)}_{\to-\infty} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)}_{\to1} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to0} = 1$)

4 Cas des fonctions polynomes et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$

On utilise la propriété suivante (uniquement valable en $+\infty$ et en $-\infty$) :

PROPRIÉTÉ

- En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynome a la même limite que son terme de plus haut degré.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction rationnelle (c'est à dire, un quotient de deux polynomes) a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

▶ *Exemples :*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-x+4 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ ($3x^2$ est le terme de plus haut degré de ce polynome)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3+4x^2-7x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ ($2x^3$ est le terme de plus haut degré de ce polynome)

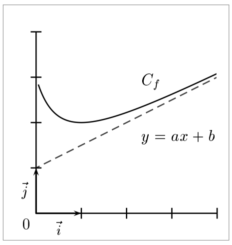
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+4x+2}{x-7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ (on ne garde que le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur - il faut ensuite obligatoirement simplifier le quotient obtenu)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-4x^2}{x^3+7x+6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} -4 \times \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} = 0$

5 Asymptote oblique à une courbe

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ et a, b deux réels ($a \neq 0$).
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite D d'équation $y = ax+b$ est dite asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.



▶ **Remarques :**

- De la même façon, si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite D d'équation $y = ax+b$ est dite asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$.
- Une même droite peut-être asymptote oblique en $-\infty$, ou en $+\infty$, ou aux deux infinis. Il faut donc vérifier la limite de $f(x) - (ax+b)$ à tous les infinis possibles (selon ce qu'indique l'ensemble de définition de f).

▶ *Exemple :* Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+x+1}{x}$ et D la droite d'équation $y = 3x+1$.
Montrons que D est une asymptote oblique à la courbe C_f :
Vu l'ensemble de définition, le seul « infini » où D puisse être asymptote est $+\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (3x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x+1}{x} - 3x - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x+1-3x^2-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Cela prouve bien que D est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.

6 Bilan sur les asymptotes

- **Asymptotes verticales :**
  - Elles n'existent que pour x tendant vers un nombre fini.
  - Si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a \text{ ou } x<a}} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe C_f.
- **Asymptotes horizontales :**
  - Elles n'existent que pour x tendant vers un « infini » (elles peuvent être asymptotes en un infini, ou aux deux infinis).
  - Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ (l réel) alors la droite D d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe C_f.
  - Pour étudier la position relative entre l'asymptote D et la courbe C_f, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - l$:
    Si pour tout x d'un intervalle I, $f(x) - l > 0$ alors C_f est au dessus de D sur I.
    Si pour tout x d'un intervalle I, $f(x) - l < 0$ alors C_f est en dessous de D sur I.

- **Asymptotes obliques :**
  - Elles n'existent que pour x tendant vers un « infini » (elles peuvent être asymptotes en un infini, ou aux deux infinis).
  - Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite D d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe C_f.
  - Pour étudier la position relative entre l'asymptote D et la courbe C_f, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax+b)$:
    Si pour tout x d'un intervalle I, $f(x) - (ax+b) > 0$ alors C_f est au dessus de D sur I.
    Si pour tout x d'un intervalle I, $f(x) - (ax+b) < 0$ alors C_f est en dessous de D sur I.

7 Théorèmes de comparaison en $+\infty$ ou en $-\infty$

PROPRIÉTÉ

Etant donné f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I de borne $+\infty$:

- Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *(« une fonction supérieure à une fonction tendant vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$ »)*
- Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ alors on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. *(« une fonction inférieure à une fonction tendant vers $-\infty$ tend aussi vers $-\infty$ »)*
- Si pour tout x de I, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$ (l réel) alors on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. *(« une fonction encadrée par deux fonctions tendant vers l tend aussi vers l » - cette propriété est appelée « théorème des gendarmes »)*

► **Remarques :**

- On a la même propriété quand x tend vers $-\infty$.
- On n'utilise ces théorèmes que pour les limites que ne l'on sait pas déterminer directement

► *Exemples :*

• Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x+3} \geqslant \sqrt{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. On peut en conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$

• Pour tout $x > 1$, $\quad 1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} \leqslant 2 \Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} < \sqrt{2} \times \dfrac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2} \times \dfrac{1}{x} = 0$.

On peut donc en conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 0$.