Séquence 4

> Graphes non orientés

Sommaire Séquence 4

1 Chapitre — Cours

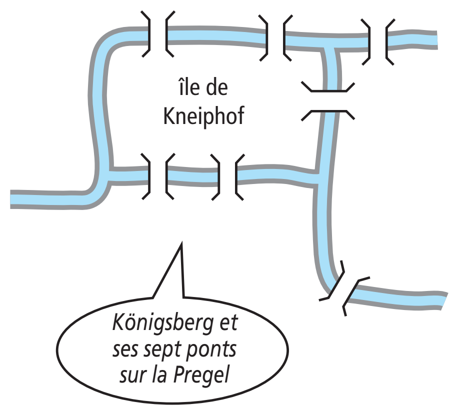
A Aperçu historique

On considère généralement que la théorie des graphes a eu comme point de départ le célèbre problème des ponts de Königsberg, résolu en 1736 par Léonhard EULER (1707-1783).

Voici un énoncé du problème des ponts de Königsberg :

« Est-il possible de partir d'un endroit de la ville de Königsberg et d'y revenir après avoir fait une promenade empruntant une fois et une seule chacun des sept ponts de la ville ? »

▶ La ville de Königsberg Königsberg, appelée Kaliningrad depuis 1946, est située en Russie (autrefois en Prusse comme le montre la carte suivante datant de 1918).

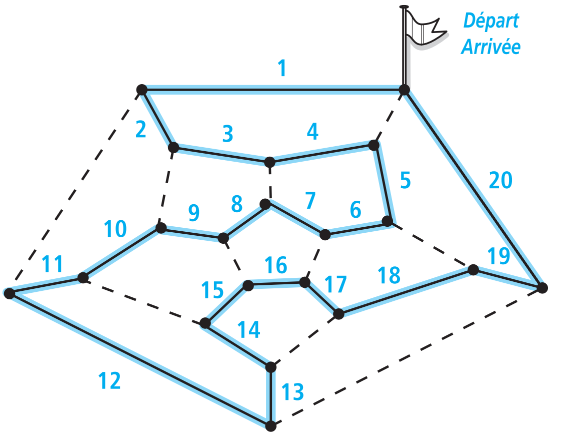


Si la ville de Königsberg est célèbre pour ses ponts on peut aussi citer quelques hommes célèbres qui y sont nés : les mathématiciens Goldbach (1690-1764) et Hilbert (1862-1943) ainsi que le philosophe Kant (1724-1804).

Un autre grand problème classique est le problème du « voyageur de commerce ». On considère 20 villes réparties à la surface du globe : a, b, c, ..., s, t. Chaque ville étant reliée à trois autres par une « route », un voyageur de commerce souhaite visiter ces vingt villes une fois et une seule et revenir à son point de départ.

Le mathématicien irlandais William HAMILTON (1805-1865) imagina de placer ces 20 villes aux sommets d'un dodécaèdre régulier (polyèdre ayant 12 faces et 20 sommets) modélisé par un graphe.

Voici une représentation dans le plan d'un dodécaèdre régulier sur lequel un **chemin hamiltonien** a été tracé.



Les nombres indiquent l'ordre dans lequel les 20 villes sont visitées.

Il faudra ensuite attendre le XX^{e} siècle pour voir la théorie des graphes se développer grâce à des mathématiciens comme König, Kuratowski, Erdös, Berge et beaucoup d'autres.

La théorie des graphes est un outil de modélisation et de résolution de problèmes. Citons quelques domaines où elle peut s'appliquer :

- optimisation de réseaux de transport, de télécommunications ;
- modélisation de réseaux informatiques ;
- la théorie des jeux ...

Un graphe est en fait une structure relativement simple constituée d'un ensemble de points reliés par des lignes appelées arêtes (ou arcs si le graphe est orienté).

B Notion de graphe

1 Étude de deux exemples

Exemple 1

Énoncé

Dans le jeu d'échecs la pièce dont le déplacement est le plus compliqué est le cavalier.

Les possibilités de déplacement d'un cavalier sur un échiquier sont indiquées sur la figure 1.

On considère maintenant l'échiquier 3×3 de la figure 2.

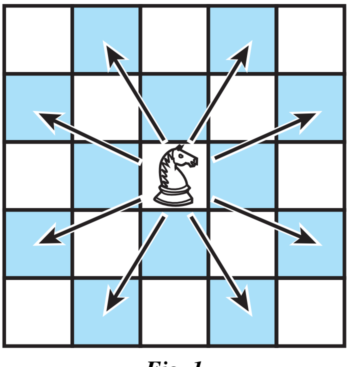


Fig. 1

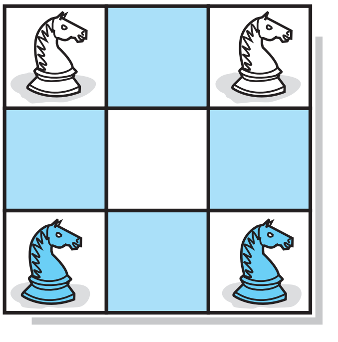


Fig. 2

Sur cet échiquier réduit sont placés 2 cavaliers blancs et 2 cavaliers en couleur.

Est-il possible de permuter, sur cet échiquier réduit, les 2 cavaliers blancs et les deux cavaliers en couleur ?

Solution

On peut indiquer sur un échiquier schématisé tous les mouvements possibles des cavaliers (voir **figure 3**).

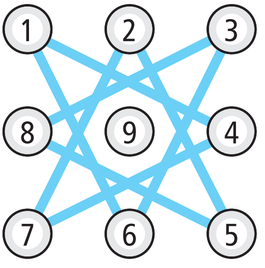


Fig. 3

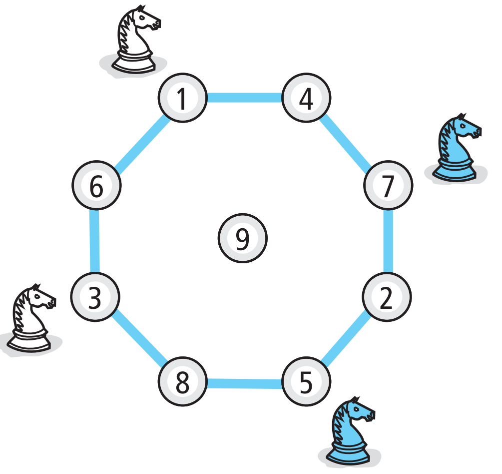


Fig. 4

On constate qu'il est impossible pour un cavalier de se retrouver dans la case centrale.

On va essayer de trouver une autre disposition des 8 cases sur lesquelles les cavaliers se déplacent de telle manière que les « fils » ne se croisent pas (voir **figure 4**).

Cette figure nous montre que l'on pourra effectivement permuter les cavaliers blancs et les cavaliers en couleur.

Il suffit de choisir un sens de parcours, par exemple ↺, de déplacer chaque cavalier d'une case et de recommencer cette opération trois fois. Chaque cavalier aura alors pris la place du cavalier opposé (le 1 en 5 ; le 7 en 3 ; le 5 en 1 ; le 3 en 7).

> **Conclusion**
>
> **Oui il est possible, sur cet échiquier 3×3, de permuter les cavaliers blancs et les cavaliers en couleur.**

Remarque *Comme chaque cavalier se déplace 4 fois le nombre minimum de coups pour arriver à permuter les cavaliers blancs et les cavaliers de couleur est égal à 16.*

Exemple ❷

Énoncé

Un domino est fabriqué en juxtaposant deux nombres pris parmi les nombres de 0 à 6. Dans un jeu de dominos il y a 7 doubles et 21 dominos non doubles.

❶ Dans cette question on considère seulement les nombres de 0 à 2.

Citer tous les dominos de ce mini jeu.

Est-il possible, en respectant les règles du jeu de dominos, de les disposer de façon à former une chaîne fermée ?

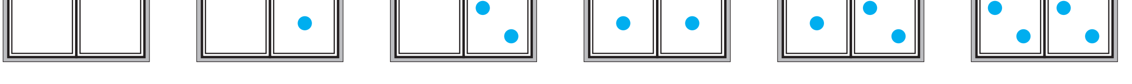
❷ Dans cette question on considère les nombres de 0 à 3.

Citer tous les dominos de ce mini jeu.

Est-il possible, en respectant les règles du jeu de dominos, de les disposer de façon à former une chaîne fermée ? une chaîne simple ?

Solution

❶ Les dominos de ce mini jeu sont les suivants :

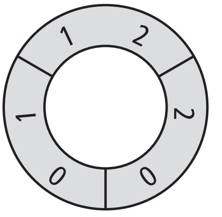


On peut aussi représenter ces dominos par : 00 ; 01 ; 02 ; 11 ; 12 ; 22 en convenant que le domino 12 est le même que le domino 21, etc ...

Ce mini jeu comporte 6 dominos.

On peut, dans un premier temps, exclure les doubles car ils pourront toujours être inclus dans une chaîne fermée, si celle-ci existe.

Une chaîne fermée apparaît immédiatement :



On peut donner une autre représentation graphique de cette chaîne, sous forme de triangle (voir **figure 5**).

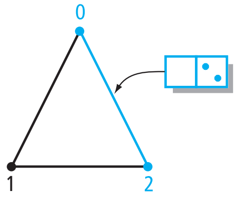


Fig. 5

Un **domino** est représenté par un **segment**.

Former une chaîne fermée avec ces 3 dominos revient à :

- partir d'un sommet du triangle ;
- revenir ensuite à ce sommet après avoir parcouru chacun des côtés une fois et une seule.

On peut donc former une chaîne fermée avec les 6 dominos.

Écrivons cette chaîne « en ligne », les deux extrémités étant identiques.

01	**11**	**12**	**22**	**20**	**00**

❷ Avec les nombres 0, 1, 2 et 3 on obtient les dominos suivants :

00 - 01 - 02 - 03 - 11 - 12 - 13 - 22 - 23 - 33.

Ce jeu comporte 10 dominos.

- Considérons les 6 dominos non doubles.

Les 4 nombres peuvent être disposés en carré. Les 6 dominos étant les 4 côtés du carré et les 2 diagonales (voir **figure 6**).

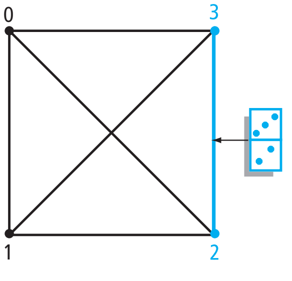


Fig. 6

Chacun des 6 segments représente un domino.

Vu la symétrie de la **figure 6** on peut essayer en partant de n'importe quel nombre.

On part de 0 par un des 3 segments.

On doit revenir au 0 par un second segment à un moment donné.

On repart alors de 0 par le troisième et dernier segment : il sera donc impossible d'y revenir.

On ne peut pas former une chaîne fermée avec les 10 dominos.

▶ Former une chaîne simple avec ces 6 dominos revient à :

– partir d'un nombre ;

– parcourir ensuite chacun des 6 segments une fois et une seule ;

– terminer par un nombre différent du premier.

Supposons que l'on parte de 0 pour arriver à 1.

On devrait alors passer au nombre 3 et au nombre 2 un nombre pair de fois : en effet il faut y aller et pouvoir repartir. Comme il n'y a que trois segments qui ont le nombre 3 comme extrémité cela est impossible.

On pourrait faire un raisonnement analogue en partant d'un autre nombre que 0 pour arriver soit à 1, soit à 2, soit à 3.

On ne peut pas former de chaîne simple avec les 10 dominos car on ne peut déjà pas le faire avec les 6 non doubles.

Remarque *Avec les 6 non doubles on peut faire une chaîne simple dont la longueur maximale est 5.*

Voici une chaîne de longueur 5 :

01	12	23	30	02

❷ Premières définitions

Les deux exemples précédents ont été résolus de manière analogue : à chaque fois une solution graphique a été donnée. Chacune des représentations graphiques est formée de points reliés par des lignes : ce type de graphique est appelé graphe.

Définition ❶

▶ Un **graphe** est composé de points éventuellement reliés par des lignes.

▶ Les points sont les **sommets** du graphe et les lignes les **arêtes** du graphe.

▶ Deux sommets sont **adjacents** (ou **voisins**) s'ils sont reliés par une arête.

Ainsi le graphe de la **figure 6** comporte 4 sommets et 6 arêtes.

▶ Un **sommet isolé** est un sommet qui n'est relié à aucun autre.

Définition ❷

▶ Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.

▶ **L'ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Ainsi le graphe de la **figure 6** est d'ordre 4 et chaque sommet a pour degré 3.

Définition ❸

▶ Une **chaîne** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arêtes. Ainsi $(0, 1, 2, 0)$ est une chaîne sur la **figure 5**.

▶ Une **chaîne** est **simple** si elle n'utilise pas plus d'une fois une même arête.

▶ Une **chaîne** est **fermée** si l'origine et l'extrémité sont confondues.

▶ Une **chaîne** est **élémentaire** si elle n'utilise pas plus d'une fois un même sommet.

Définition ❹

▶ Un **cycle** est une chaîne fermée simple.

▶ Un **cycle** est **élémentaire** s'il n'utilise pas plus d'une fois le même sommet, à l'exception de celui choisi comme sommet de départ.

Définition ❺

▶ On appelle **graphe complet** un graphe possédant une arête et une seule entre chaque paire de sommets.

▶ On appelle **graphe planaire** un graphe que l'on peut dessiner dans un plan sans que ses arêtes ne se croisent.

▶ On appelle **graphe connexe** un graphe dans lequel chaque paire de sommets est toujours reliée par une chaîne.

Ainsi le graphe de la figure 3 est planaire car il peut être représenté comme sur la figure 4. Par contre il n'est ni connexe, ni complet car le sommet 9 est isolé.

Le graphe de la figure 6 est planaire, complet et donc connexe.

Propriété 1

Un graphe complet est toujours connexe.

Définition 6 ▶ Les graphes des figures 3 et 4 sont dits **isomorphes** car ils traduisent exactement la même situation.

Définition 7 La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

C Graphes eulériens

1 Les ponts de Königsberg

Exemple 3

Énoncé

C'est en 1736 que Léonhard Euler a résolu le problème qui, à cette époque, préoccupait les habitants de Königsberg.

Dans cette ville, l'île de Kneiphof est entourée par deux bras de la Pregel comme le montre la figure 7. Sept ponts permettent de traverser la Pregel et donc de passer d'une partie à l'autre de la ville (les ponts sont numérotés de 1 à 7).

Un promeneur peut-il trouver un itinéraire qui part d'un endroit et qui y revient, en passant une et une seule fois sur chacun des sept ponts ?

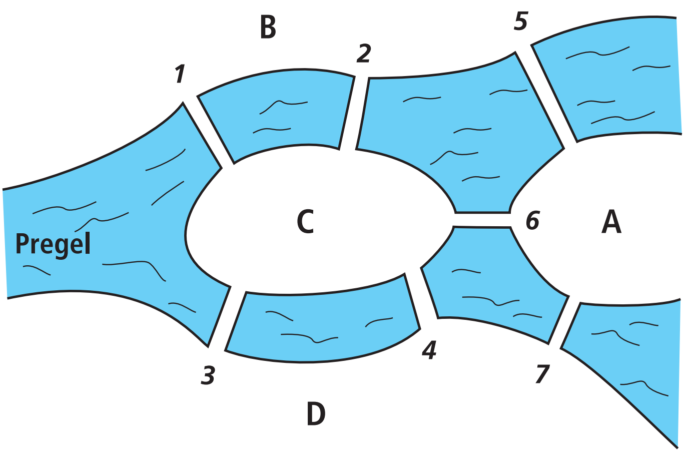


Fig. 7

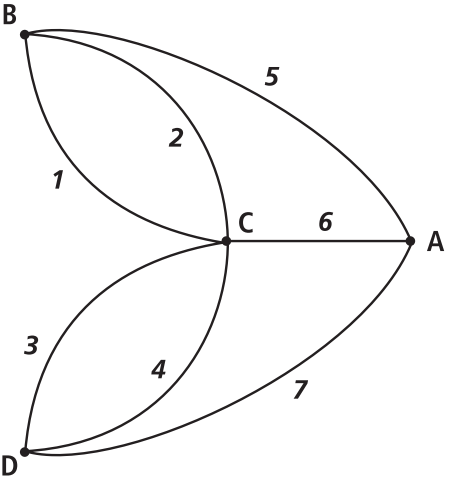


Fig. 8

Solution

Euler a modélisé la configuration des ponts de Königsberg par un graphe.

Les 4 sommets représentent les 4 parties de la ville (notées A, B, C et D) et les 7 arêtes les 7 ponts.

Si un sommet est de degré pair il ne pose pas de problème car il y a autant d'arêtes pour arriver que d'arêtes pour partir.

Si un sommet est de degré impair il constitue nécessairement un début ou une fin d'itinéraire. En effet sinon il y aura une fois où on ne pourra pas, soit y revenir, soit en repartir.

Ainsi seuls les sommets de départ et d'arrivée peuvent être de degré impair. Comme le graphe comporte plus de deux sommets impairs il est impossible de trouver un itinéraire vérifiant les conditions imposées.

Conclusion

Le problème des ponts de Königsberg n'a pas de solution. Il est impossible de trouver un itinéraire passant une fois et une seule sur chaque pont.

❷ Promenade en Bretagne

Exemple ❹

Énoncé

Brieg doit emprunter une fois et une seule chacune des routes reliant deux à deux certaines villes bretonnes dont Brest (B), Nantes (N), Quimper (Q), Rennes (R), Saint-Brieuc (S), Vannes (V).

Les six villes et les sept routes sont sur la figure 9.

❶ Montrer que cela n'est pas possible en partant de Brest.

❷ Est-ce possible en partant de Rennes ? Si oui, quelle peut être la ville d'arrivée ?

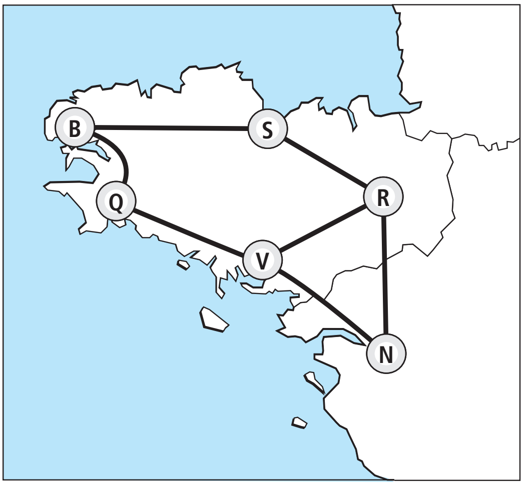


Fig. 9

Solution

Les villes sont les six sommets du graphe et les routes les sept arêtes.

❶ ***Brieg part de Brest.***

Considérons les sommets V et R qui sont de degré 3. Aucun de ces deux sommets, qui sont de degré impair, n'est situé au début du parcours.

On ne peut pas emprunter les sept routes en partant de Brest.

❷ ***Brieg part de Rennes.***

Comme seuls les sommets R et V sont de degré impair on peut trouver un parcours partant de Rennes. Ce parcours se terminera obligatoirement à Vannes.

Donnons, en ligne, un exemple de trajet possible :

R – S – B – Q – V – N – R – V.

On peut en partant de Rennes et en arrivant à Vannes emprunter une fois et une seule chacune des sept routes.

❸ Un graphe eulérien

Exemple ❺ *Énoncé*

On considère le graphe de la figure 10.

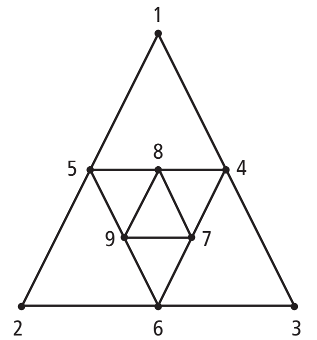


Fig. 10

❶ Peut-on trouver un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ?

❷ Comparer la somme des degrés au nombre d'arêtes.

Solution

❶ Les neuf sommets sont de degré pair (soit 2, soit 4).

On peut donc trouver un cycle passant une fois et une seule par chaque arête.

Donnons un exemple :

1 – 5 – 2 – 6 – 9 – 5 – 8 – 9 – 7 – 8 – 4 – 7 – 6 – 3 – 4 – 1.

Oui, il est possible de trouver un cycle passant une fois et une seule par chacune des arêtes du graphe.

Remarque *L'exemple choisi nous montre aussi que l'on peut trouver un cycle partant de n'importe quel sommet.*

❷ Le nombre d'arêtes est égal à 15.

On a 6 sommets de degré 4 et 3 sommets de degré 2.

On calcule $(4 \times 6) + (3 \times 2) = 30$.

La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Remarque *Cette propriété est vraie pour n'importe quel graphe.*
En effet, quand on additionne les degrés de chaque sommet, chaque arête est comptée deux fois à cause de ses deux extrémités.

❹ Définitions et propriétés

Définition ❽

▶ Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.

▶ Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arête du graphe.

▶ Un **graphe eulérien** est un graphe qui possède un cycle eulérien.

Ainsi

▶ sur la figure 8 il n'y a ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien ;

▶ sur la figure 9 il y a une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien ;

▶ sur la figure 10 il y a des chaînes eulériennes et des cycles eulériens.

Propriété ❷

▶ La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

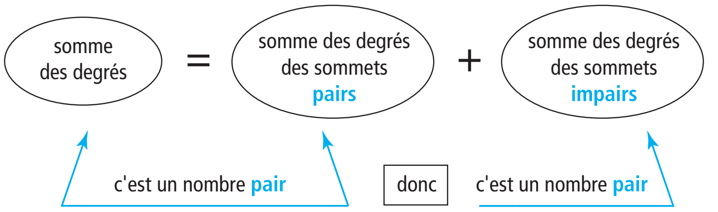
▶ La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est toujours un nombre pair.

On peut en déduire la propriété suivante :

Propriété ❸

Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

Démonstration :



Donnons une application un peu inattendue de cette propriété.

Dans une réunion de n personnes beaucoup de poignées de main sont échangées. Le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est un nombre pair.

❺ Comment reconnaître si un graphe admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien ?

On considère seulement les graphes connexes c'est-à-dire les graphes dans lesquels deux sommets sont toujours reliés par une chaîne.

Les exemples 3, 4 et 5 nous permettent d'énoncé le théorème d'Euler (1766).

Propriété ❹

▶ Un graphe connexe admet une **chaîne eulérienne** si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est **0 ou 2**.

▶ Un graphe connexe admet un **cycle eulérien** si et seulement **si tous les sommets sont de degré pair**.

L'exemple 4 nous a montré que pour tracer une chaîne eulérienne on ne peut pas partir de n'importe quel sommet.

Propriété ❺

▶ Si un graphe connexe possède 2 sommets de degré impair alors ces 2 sommets sont situés au départ et à l'arrivée de la chaîne eulérienne.

▶ Pour tracer un cycle eulérien on peut partir de n'importe quel sommet.

❻ Application

Exemple ❻

Énoncé

Les graphes suivants possèdent-ils des chaînes eulériennes ? des cycles eulériens ? (*Figure 11*)

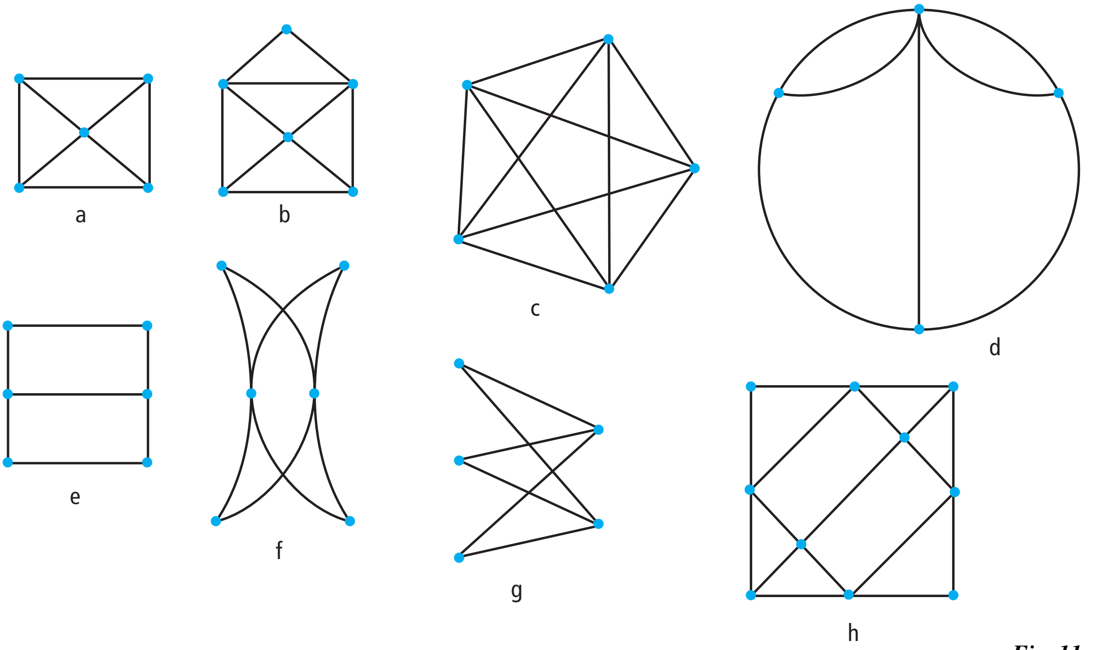


Fig. 11

Solution

Pour chaque graphe on compte le nombre de sommets de degré impair.

S'il y en a 0 on peut tracer des cycles eulériens et donc aussi des chaînes eulériennes.

S'il y en a 2 on peut tracer uniquement des chaînes eulériennes.

Dans tous les autres cas il n'y a ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien.

	a	b	c	d	e	f	g	h
Sommets degré impair	4	2	0	4	2	0	2	2
Chaîne eulérienne		oui	oui		oui	oui	oui	oui
Cycle eulérien			oui			oui		

Remarques

- *Le graphe 11.c est un graphe complet.*
- *Le graphe 11.d est le graphe des ponts de Königsberg.*
- *Le graphe 11.f, formé de deux croissants entrelacés, est connu sous le nom de « signature de Mahomet », car il paraît que Mahomet le dessinait d'un seul trait avec la pointe de son cimeterre.*
- *Le graphe 11.g est dit **biparti** car les sommets sont divisés en deux classes de telle manière que deux sommets d'une même classe ne sont jamais adjacents.*

D Graphes complets

1 Calendrier de tournoi

Exemple 7

Énoncé

Dans un tournoi chaque joueur doit rencontrer successivement chacun des autres.

À l'aide d'un graphe, ou d'une autre représentation, établir un calendrier pour déterminer les rencontres qui auront lieu chaque « journée », dans les cas suivants :

- 4 joueurs participent au tournoi ;

- 6 joueurs participent au tournoi ;
- 5 joueurs participent au tournoi.

Solution

- Pour 4 joueurs

Appelons par A, B, C et D les 4 joueurs.

Comme A peut rencontrer successivement B, C et D le calendrier est assez facile à établir.

Donnons plusieurs représentations de ce calendrier.

1	2	3
AB	AC	AD
CD	BD	BC

	A	B	C	D
A		1	2	3
B	1		3	2
C	2	3		1
D	3	2	1	

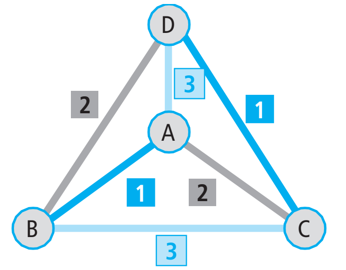


Fig. 12

Le calendrier est unique, à une permutation près sur les journées (la première journée peut être AC et BD).

Le graphe de la figure 12 est un graphe complet car entre deux sommets quelconques il y a une arête unique.

- Pour 6 joueurs

Appelons A, B, C, D, E et F les 6 joueurs.

Donnons une représentation par un tableau et une autre par un graphe.

	A	B	C	D	E	F
A		1	2	3	4	5
B			5	4	2	3
C				1	3	4
D					5	2
E						1
F						

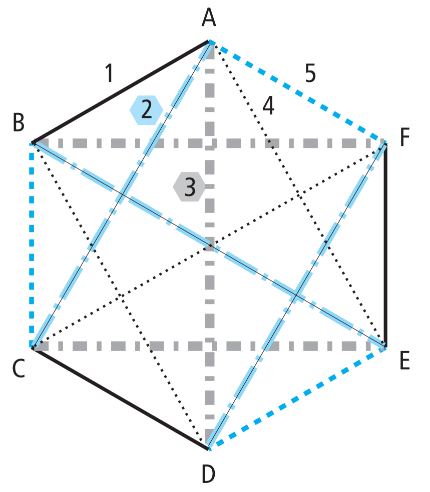


Fig. 13

Pour le tableau il n'est pas utile de remplir la partie inférieure.

On montre que le tournoi peut être organisé sur 5 journées. Cette fois-ci le calendrier n'est pas unique : la première journée pourrait être AB, CE, DF. Il existe en réalité 6 calendriers différents, à une permutation près sur les journées.

Le graphe de la figure 13 est un graphe complet d'ordre 6.

- Pour 5 joueurs

Appelons A, B, C, D et E les 5 joueurs. On rajoute un joueur fictif F pour se ramener à 6 joueurs.

De la même façon le tournoi pourra être organisé sur 5 journées avec chaque journée un joueur au repos.

Si on fait un graphe avec F le graphe ne sera pas complet car F sera un point isolé.

Si on enlève le point F du graphe on retrouve un graphe complet d'ordre 5.

Remarques

- *Dans chaque cas le 1 désigne la 1re journée, le 2 la 2de journée, etc ...*
- *La figure 12 est une représentation plane d'un tétraèdre.*

❷ Le jeu de dominos

Exemple ❽

Énoncé

On considère un jeu de 28 dominos (7 doubles et 21 non doubles).

Peut-on, en respectant les règles du jeu de dominos, former une chaîne fermée en juxtaposant tous les dominos ?

Solution

Considérons les 21 non doubles car s'il est possible de former une chaîne fermée avec ces 21 dominos on pourra intercaler les 7 doubles dans la chaîne.

On va, comme dans l'exemple ❷, représenter un domino par l'arête d'un graphe.

Former une chaîne fermée c'est partir d'un sommet et y revenir après être passé une fois et une seule sur chaque arête.

Comme tous les sommets sont de degré 6 on peut trouver un cycle eulérien en partant de n'importe quel sommet.

Comme on peut former une chaîne fermée avec les 21 dominos on peut aussi le faire avec les 28 dominos.

Le graphe des 21 dominos est un graphe complet d'ordre 7 (voir figure 14).

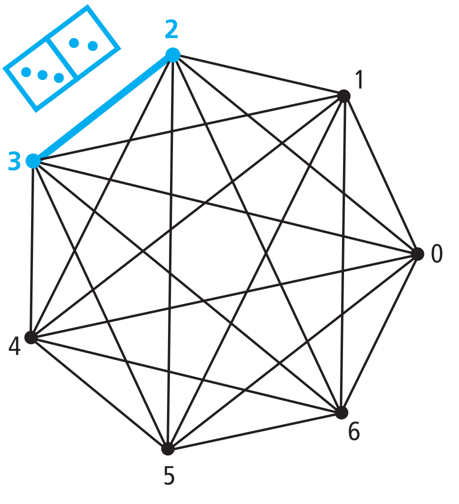


Fig. 14

E Nombre chromatique

❶ Coloriage

Exemple ❾

Énoncé

On considère les trois schémas de la figure 15.

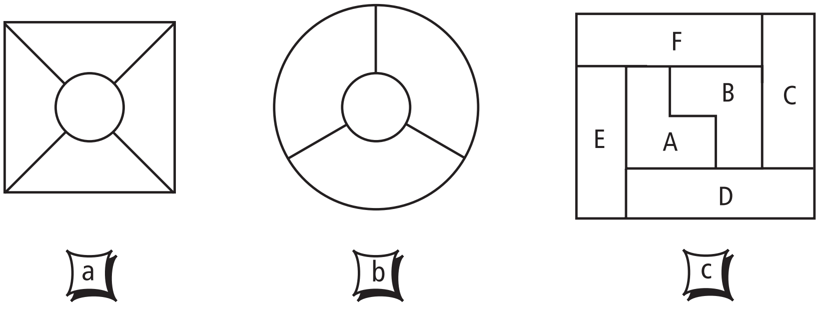


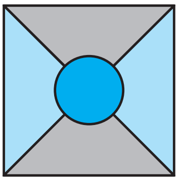
Fig. 15

On veut colorier chacun des trois schémas précédents sachant que deux régions voisines sont de couleurs différentes (deux régions sont voisines si elles ont une ligne frontière commune).

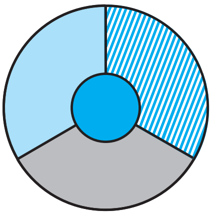
Trouver le nombre minimal de couleurs que l'on doit utiliser dans chacun des cas.

Solution

▶ Pour les **figures** a et b c'est relativement facile.



a



b

On commence par colorier la région centrale. Ensuite, il faut deux nouvelles couleurs pour a.

Il faut au minimum 3 couleurs pour la figure a.

On commence par colorier la région centrale. Ensuite il faut trois nouvelles couleurs pour b.

Il faut au minimum 4 couleurs pour la figure b.

▶ Pour la **figure** c on va remplacer le schéma par un graphe.

Supposons que chaque partie de la **figure** c représente un pays sur une carte.

La capitale d'un pays va être symbolisée par un sommet du graphe de la même couleur que le pays. Si deux pays ont une frontière commune les capitales seront reliées par une arête. On obtient le graphe représenté sur la **figure 16**.

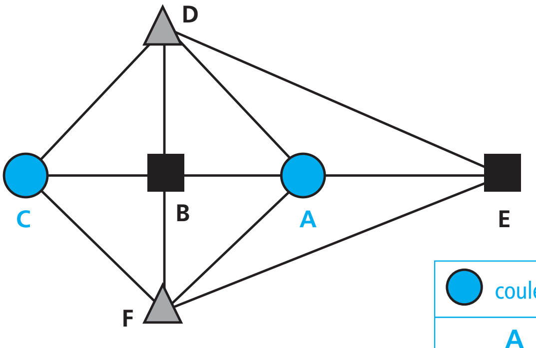


Fig. 16

Pour colorier A, B, D il faut 3 couleurs.

Montrons que ces 3 couleurs suffisent.

couleur 1	couleur 2	couleur 3
A	**B**	**D**
C	**E**	**F**

Il faut au minimum 3 couleurs.

❷ Les arrondissements de Paris

Exemple ⑩

Énoncé

Voici une carte des vingt arrondissements de Paris (voir **figure 17**).

Trouver le nombre minimal de couleurs qu'il faut pour colorier les vingt arrondissements sachant que deux arrondissements voisins sont de couleurs différentes.

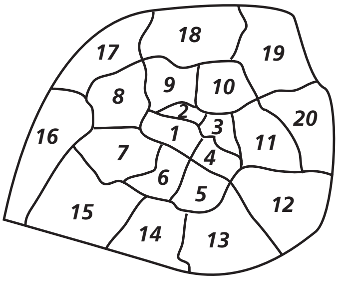


Fig. 17

Solution

On va représenter un arrondissement par un sommet du graphe.

Deux sommets sont reliés par une arête si les deux arrondissements qu'ils représentent sont voisins.

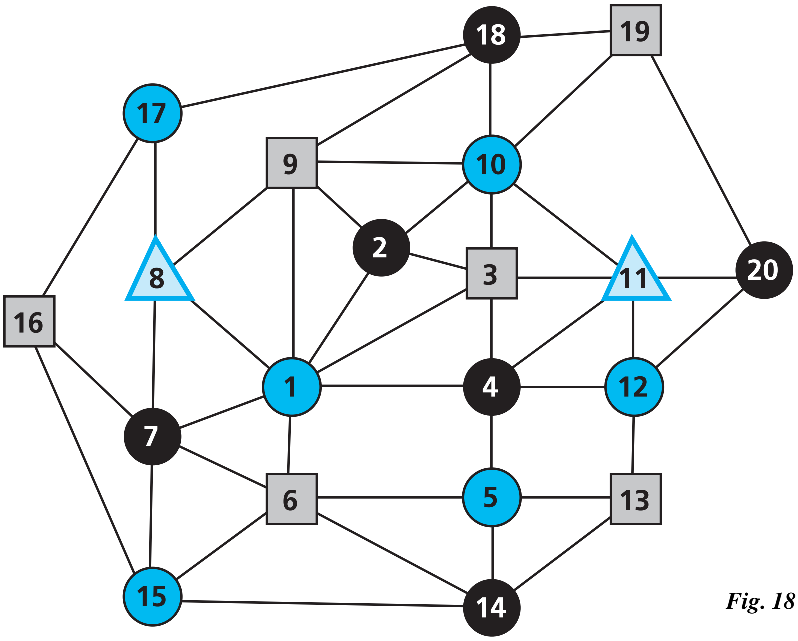


Fig. 18

On obtient le graphe de la figure 18.

- On choisit une couleur pour le sommet 1 qui est celui de plus haut degré.
- Les sommets : 10 5 12 15 17 sont de la même couleur.
- On choisit une seconde couleur pour : 3 6 9 13 16 19
- On choisit une autre couleur pour : 4 7 2 14 18 20
- On choisit une dernière couleur pour : 11 8

Il faut au minimum 4 couleurs.

3 Le théorème des 4 couleurs

Tout élève a été amené dans sa scolarité à colorier des cartes de géographie.

On veut connaître le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier une carte comprenant un certain nombre de pays de façon que deux pays voisins ayant une ligne frontière commune ne soient pas de la même couleur.

Le problème a été formulé pour la première fois par l'Ecossais Francis Guthrie en 1852. En 1878 le mathématicien anglais Arthur Cayley reposa le problème et en 1879 Kempe proposa une preuve mais cette preuve contenait une erreur.

Ce n'est qu'en 1976 que deux mathématiciens américains Kenneth Appel et Wolfgang Haken proposent une démonstration faisant appel à un ordinateur.

Le nombre minimal de couleurs est bien égal à quatre comme l'avait conjecturé Francis Guthrie.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Propriété 6

Énoncé 1 : on peut colorier à l'aide de 4 couleurs une carte où des pays voisins sont de couleurs différentes.

Énoncé 2 : on peut colorier les sommets d'un graphe planaire à l'aide de 4 couleurs de telle manière que chaque arête possède deux extrémités de couleurs différentes.

Définition 9

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.

Propriété 7

Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à D + 1 , le nombre D étant le plus haut degré des sommets.

Exemple 11

Énoncé

Cinq étudiants doivent passer différentes épreuves à l'écrit d'un examen. Les épreuves que chacun doit passer sont données dans le tableau suivant :

Anna	Dessin	Français	Italien	
Blaise	Dessin	Italien		
Carmen	Histoire	Musique		
Dimitri	Dessin	Français	Musique	Russe
Enora	Français	Histoire		

Chaque étudiant passe au maximum une épreuve par jour et chaque épreuve n'est organisée qu'une fois.

❶ En combien de jours minimum peut-on organiser cet examen ?

❷ Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut organiser le même jour ?

Solution

❶ On trace un graphe où les sommets représentent les épreuves. Deux sommets sont reliés par une arête s'il y a incompatibilité. On va ensuite colorier les sommets du graphe en prenant une couleur différente pour chaque jour (sur le graphe de la figure 19 un chiffre correspond à une couleur).

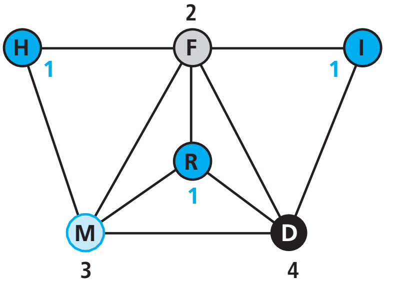


Fig. 19

Considérons le sous-graphe complet formé des sommets D, F, M et R. Ce graphe d'ordre 4 nécessite 4 couleurs.

Il faudra donc en tout 4 couleurs c'est-à-dire que l'examen durera 4 jours. Donnons les épreuves dans un tableau.

Jour 1	Histoire – Italien – Russe	**Jour 3**	Musique
Jour 2	Français	**Jour 4**	Dessin

❷ Les épreuves qui peuvent être organisées un même jour sont celles qui ne sont pas reliées par une arête.

On voit que le sous-graphe formé des sommets H, I et R est sans arête. Ces 3 épreuves peuvent donc être organisées un même jour.

On peut organiser au maximum 3 épreuves dans une journée : H, I et R.

Définition ⑩

▶ Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe G′ composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes reliant ces sommets dans G (s'il y en a).

▶ Un **sous-graphe stable** est un sous-graphe sans arête (on dit aussi vide).

▶ Le **nombre de stabilité** d'un graphe G est l'ordre du plus grand sous-graphe stable de G.

❹ Algorithme de coloriage d'un graphe

On va prendre l'exemple du coloriage des arrondissements de Paris.

▶ On ordonne les sommets par ordre de degrés décroissants :

degrés	7	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3
arrondissement	1	10	3	4	6	7	9	11	2	5	8	12	14	15	18	13	16	17	19	20

▶ Tant qu'il reste des sommets à colorier, exécuter les actions suivantes :

– choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage ;

– chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non colorié et le colorier avec la couleur d'usage ;

– colorier avec la couleur en usage et en respectant leur ordre tous les sommets non coloriés, non adjacents au dernier sommet colorié et non adjacents entre eux.

Couleur 1	1	10	5	12	15	17
Couleur 2	3	6	9	13	16	19
Couleur 3	4	7	2	14	18	20
Couleur 4	11	8				

F Distance entre deux sommets et diamètre d'un graphe

❶ Distance entre deux sommets

Exemple ⑫

Énoncé

Considérons les quatre graphes de la figure 20.

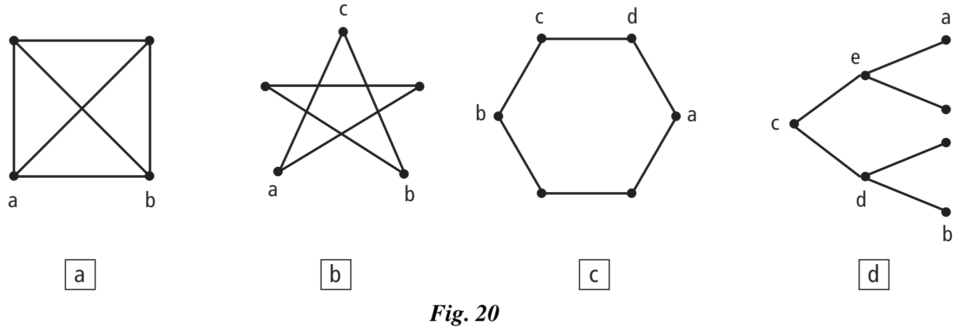


Fig. 20

Déterminer, sur chacun des graphes, la plus courte longueur des chaînes reliant a et b.

Solution

▶ Sur la figure a

La chaîne la plus courte a pour longueur 1.

▶ Sur la figure b

La chaîne la plus courte est la chaîne a-c-b qui a pour longueur 2.

▶ Sur la figure c

Une chaîne de longueur minimale est a-d-c-b et a pour longueur 3.

▶ Sur la figure d

La chaîne de longueur minimale est a-e-c-d-b et a pour longueur 4.

Définition 11 La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.

2 Diamètre d'un graphe

Exemple 13 ***Énoncé***

On considère de nouveau les quatre graphes de l'exemple 12.

Déterminer, sur chacun des graphes, la plus grande distance entre deux sommets.

Solution

On constate que, sur chaque graphe, la plus grande distance entre deux sommets est toujours inférieure ou égale à la distance entre a et b. Cette plus grande distance est le diamètre du graphe.

	a	b	c	d
diamètre	1	2	3	4

Définition 12 Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

Exemple 14 ***Énoncé***

On place n points distincts sur un cercle $(n \geq 3)$ et on trace le polygone convexe ayant ces n points pour sommets.

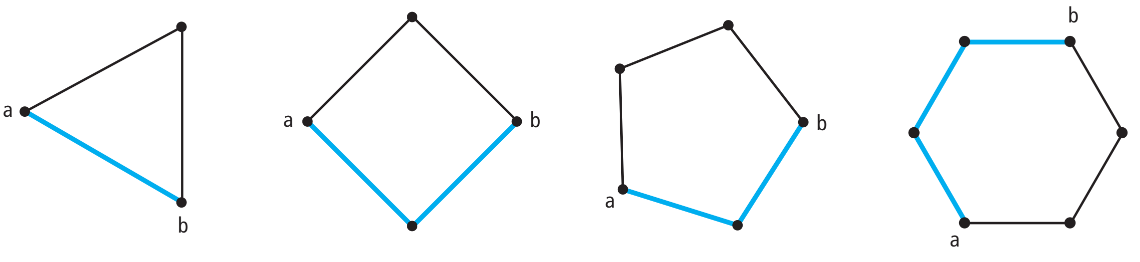
On considère le graphe G dont les sommets sont les n sommets du polygone et les arêtes les côtés du polygone.

❶ Donner le diamètre de G lorsque $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

❷ Déterminer une formule donnant le diamètre d_n d'un graphe G d'ordre n.

Solution

❶ On trace les graphes correspondant à $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.



$n = 3$, $d_3 = 1$ — $n = 4$, $d_4 = 2$ — $n = 5$, $d_5 = 2$ — $n = 6$, $d_6 = 3$

Fig. 21

❷ On peut supposer le polygone régulier ce qui ne changera pas les résultats.

▶ Si n est pair alors la plus grande distance est entre deux points diamétralement opposés. La chaîne la plus courte a pour longueur $\frac{n}{2}$ car elle correspond à la moitié des arêtes.

▶ Si n est impair c'est un peu différent. Pour aller de a à b il y a deux sens de parcours. Pour deux sommets « presque » diamétralement opposés les chaînes ont pour longueurs $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$. La distance entre a et b est alors égale à $\frac{n-1}{2}$.

Conclusion

Si n est pair alors $d_n = \frac{n}{2}$ et si n impair alors $d_n = \frac{n-1}{2}$.

G Graphe pondéré et plus courte chaîne

❶ Graphe pondéré et poids d'une chaîne

Exemple ⑮ *Énoncé*

Le graphe G de la figure 22 représente un réseau autoroutier comportant 4 étapes, les sommets A, B, C et D.

Les nombres soulignés indiquent les distances entre les étapes, exprimées en km.

Les nombres entre parenthèses indiquent les prix des péages, exprimés en euros.

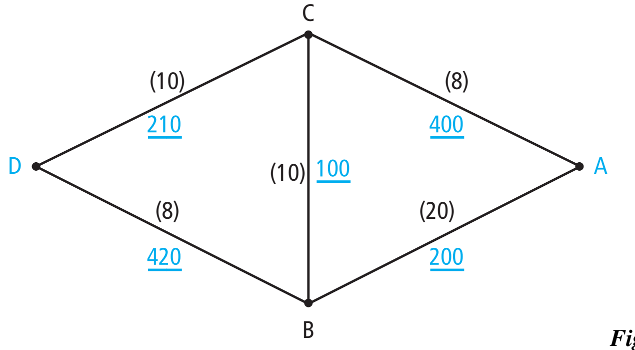


Fig. 22

❶ Déterminer le poids de la chaîne D-B-A (au sens de la distance).

Quelle est la chaîne la plus courte entre D et A ?

❷ Déterminer la chaîne qui minimise le prix du péage entre D et A.

Solution

❶ Le poids de la chaîne D-B-A est : $420 + 200 = 620$.

On peut écrire toutes les chaînes simples entre D et A.

chaîne	distance	prix
D-B-A	620	28
D-C-A	610	18
D-B-C-A	920	26
D-C-B-A	510	40

La chaîne la plus courte entre D et A est la chaîne D-C-B-A.

❷ **La chaîne qui minimise le prix du péage entre D et A est : D-C-A.**

Définition 13

▶ Un **graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de nombres positifs, appelés aussi **poids**.

▶ Le **poids d'une chaîne** d'un graphe pondéré est la somme des poids des arêtes qui la composent.

▶ Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est, parmi toutes les chaînes qui les relient, une **chaîne de poids minimum**.

2 Algorithme de la plus courte chaîne entre un sommet E et un sommet S

Exemple 16

Énoncé

Soit G le graphe représenté sur la figure 23.

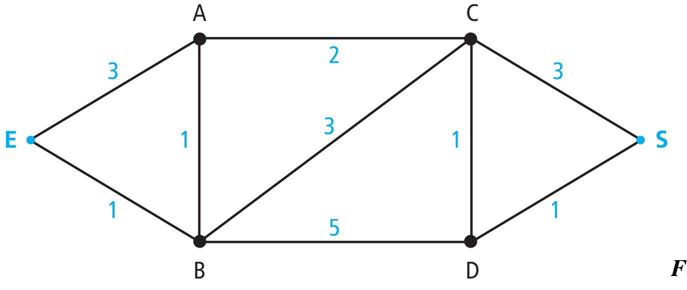


Fig. 23

Déterminer une plus courte chaîne entre E et S.

Solution

Dans cet exemple qui comporte davantage de sommets et davantage d'arrêtes que dans l'exemple précédent, la solution est moins évidente. On va donc utiliser un algorithme permettant de trouver la plus courte chaîne.

▶ **Initialisation**

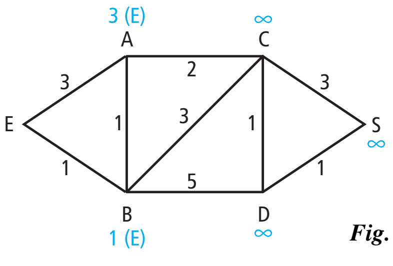


Fig. 24

– On affecte définitivement le poids 0 à E.

– On attribue provisoirement aux sommets adjacents à E le « poids » des arêtes qui les relient à E.

– On attribue provisoirement aux autres sommets le poids $+\infty$.

Dans la suite $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des sommets dont le poids est définitivement fixé.

▶ **Étapes suivantes**

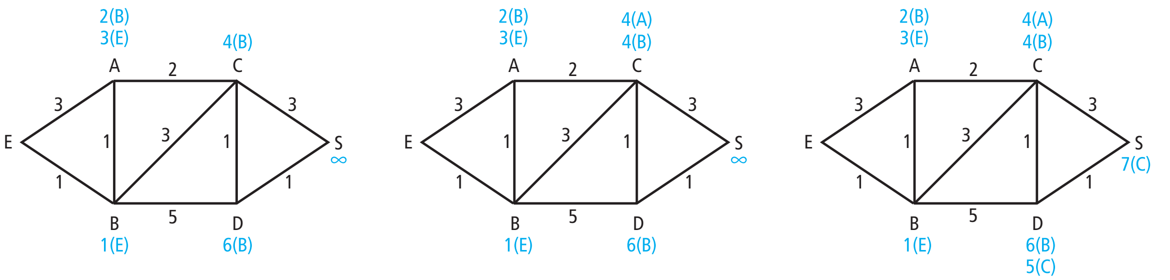
Tant que $\mathcal{P}$ ne contient pas tous les sommets et tant que le sommet S qu'on veut atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

– Parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer définitivement le poids de l'un de ceux qui ont un poids minimum : soit T ce sommet.

– Ajouter T à $\mathcal{P}$.

– Pour tout sommet T' n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ et adjacent à T, calculer la somme S du poids de T et du poids de l'arête reliant T à T' ; si S est inférieure ou égale au poids provisoire de T', affecter S à T' comme nouveau poids provisoire, et le noter $S(T)$ pour marquer la provenance de cette dernière affectation.

Voici ce que cela donne pour quelques étapes de l'algorithme :



Poids de B fixé *Poids de A fixé* *Poids de C fixé*

Fig. 25

On peut représenter toutes les étapes de l'algorithme, exécuté sur cet exemple, par un tableau où les éléments successifs de $\mathcal{P}$ figurent à droite.

E	A	B	C	D	S	$\mathcal{P}$	
0	3 (E)	1 (E)	∞	∞	∞	E	
	2 (B)	1 (E)	4 (B)	6 (B)		E, B	poids de B fixé
	2 (B)		4 (A)			E, B, A	poids de A fixé
Choix n° 1 : 4 (A)			4 (A)	5 (C)	7 (C)	E, B, A, C	poids de C fixé
				5 (C)	6 (D)	E, B, A, C, D	poids de D fixé
					6 (D)	E, B, A, C, D, S	poids de S fixé
Choix n° 2 : 4 (B)			4 (B)	5 (C)	7 (C)	E, B, A, C	poids de C fixé
				5 (C)	6 (D)	E, B, A, C, D	poids de D fixé
					6 (D)	E, B, A, C, D, S	poids de S fixé

Fig. 26

Les deux chaînes les plus courtes ont un poids égal à 6.

Elles peuvent se lire à l'envers : SDCABE et SDCBE.

▶ pour la chaîne SDCABE : S a un poids 6 venant de D, D est pondéré à partir de C, C est pondéré à partir de A, A est pondéré à partir de B et B est pondéré à partir de E.

▶ pour la chaîne SDCBE : S a un poids 6 venant de D, D est pondéré à partir de C, C est pondéré à partir de B et B est pondéré à partir de E.

Conclusion

Les deux chaînes les plus courtes, lues de l'entrée à la sortie, sont : EBACDS et EBCDS.

Elles ont toutes les deux un poids égal à 6.

Remarques

▶ *Cet algorithme de la plus courte chaîne est l'algorithme de Dijkstra.*

▶ *L'algorithme de Dijkstra peut s'appliquer à tout graphe dont les arêtes ont des « poids positifs ».*

▶ *Les chaînes EBCDS et EBACDS ont le même poids mais pas le même nombre d'arêtes.*

Si on considère le nombre d'arêtes la chaîne EBCDS a une longueur égale à 4 alors que la chaîne EBACDS a une longueur égale à 5.

H Matrice associée à un graphe

1 Étude d'un exemple

Exemple 17

Énoncé

On considère le graphe G suivant :

Donner une représentation en tableau de ce graphe.

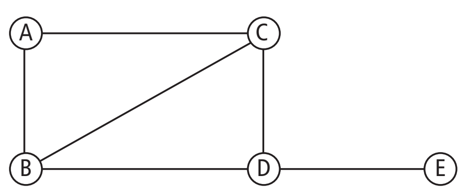


Fig. 27

Solution

On peut donner trois tableaux qui se déduisent facilement les uns des autres.

	A	B	C	D	E
A		X	X		
B	X		X	X	
C	X	X		X	
D		X	X		X
E				X	

T_1

	A	B	C	D	E
A		AB	AC		
B	BA		BC	BD	
C	CA	CB		CD	
D		DB	DC		DE
E				ED	

T_2

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	1	0
D	0	1	1	0	1
E	0	0	0	1	0

T_3

Fig. 28

On va privilégier le tableau T_3 composé de 0 et de 1.

On remarque que les tableaux sont symétriques par rapport à la première diagonale.

On dit que le tableau T_3 est la matrice associée au graphe G.

Pour représenter cette matrice on utilise plutôt l'une des deux dispositions suivantes :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

❷ Définitions

a) Matrice carrée d'ordre n

Définition ⓮ Une **matrice carrée d'ordre n** est une matrice à n lignes et à n colonnes.

Notation

$$\begin{array}{c c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & j & n \end{array} & \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ i \\ \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \boxed{\text{ligne i}} \\ & \boxed{\text{colonne j}} & \end{array}$$

Le terme a_{ij} est au croisement de la ligne i et de la colonne j.

Remarque *Le terme* a_{ij} *peut aussi se noter* (i, j).

b) Matrice associée à un graphe

Soit G un graphe d'ordre n, les sommets étant numérotés de 1 à n.

Définition 15 La **matrice associée à un graphe G d'ordre n**, les sommets étant numérotés de 1 à n, est une matrice symétrique ayant n lignes et n colonnes : le terme a_{ij} qui est à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut k, k étant le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

La matrice 5×5 de l'exemple 17 ne contient que des 0 et des 1 puisque deux sommets quelconques de ce graphe sont reliés par au plus une arête. C'est d'ailleurs ce type de matrice que l'on rencontrera le plus souvent.

Définition 16 Une matrice contenant uniquement des 0 ou des 1 est une **matrice booléenne**(**).

(**) Le mot « booléenne » vient du nom du mathématicien anglais George BOOLE (1815-1864).

3 Application

Exemple 18 *Énoncé*

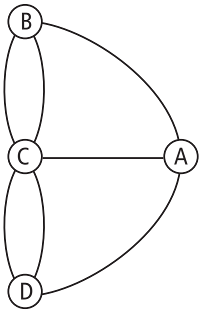
On considère le graphe modélisant les ponts de Königsberg.

Donner la matrice M associée à ce graphe.

Solution

Donnons le graphe et la matrice M associée à ce graphe.

Les sommets ont été classés dans l'ordre A, B, C, D.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 29

Exemple 19 *Énoncé*

Donner deux matrices associées au graphe suivant :

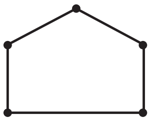
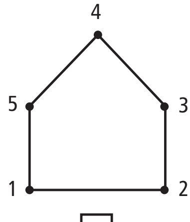


Fig. 30

Solution

La matrice associée au graphe dépend de la façon dont on va numéroter les sommets. Dans les deux cas ceux-ci seront classés dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5.

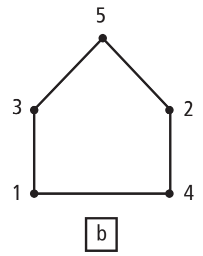
Si on a



a

alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si on a



alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Fig. 31

Cet exemple nous permet d'énoncer une propriété générale.

Propriété 8

Le nombre de 1 d'une matrice associée à un graphe sans arête multiplie est égal à la somme des degrés de tous les sommets du graphe (et donc à deux fois le nombre d'arêtes).

Exemple 20

Énoncé

On donne une matrice A et deux graphes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

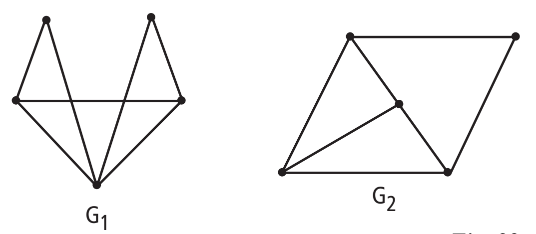


Fig. 32

Les graphes G_1 et G_2 peuvent-ils être associés à la matrice A ?

Solution

On constate d'abord que le nombre de 1 de la matrice A est égal à deux fois le nombre d'arêtes de chaque graphe.

▶ Pour G_1

Sur la première ligne il y a trois fois le nombre 1 ainsi que sur la troisième ligne. On fait correspondre aux deux sommets de degré 3 les numéros 1 et 3.

Sur la deuxième ligne il y a quatre fois le nombre 1. On fait correspondre au sommet de degré 4 le numéro 2.

Les deux autres sommets sont numérotés 4 et 5.

Cela nous donne le graphe suivant :

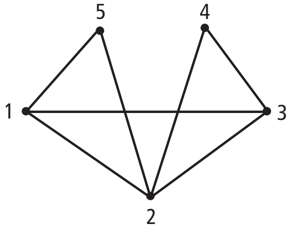


Fig. 33

Le graphe G_1 peut donc être associé à la matrice A.

▶ Pour G_2

Le graphe G_2 ne possède aucun sommet de degré 4.

On ne pourra donc pas obtenir la deuxième ligne de la matrice.

Le graphe G_2 ne peut pas être associé à la matrice A.

I Exercices d'apprentissage

Exercice 1 On considère les graphes G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 de la figure 34.

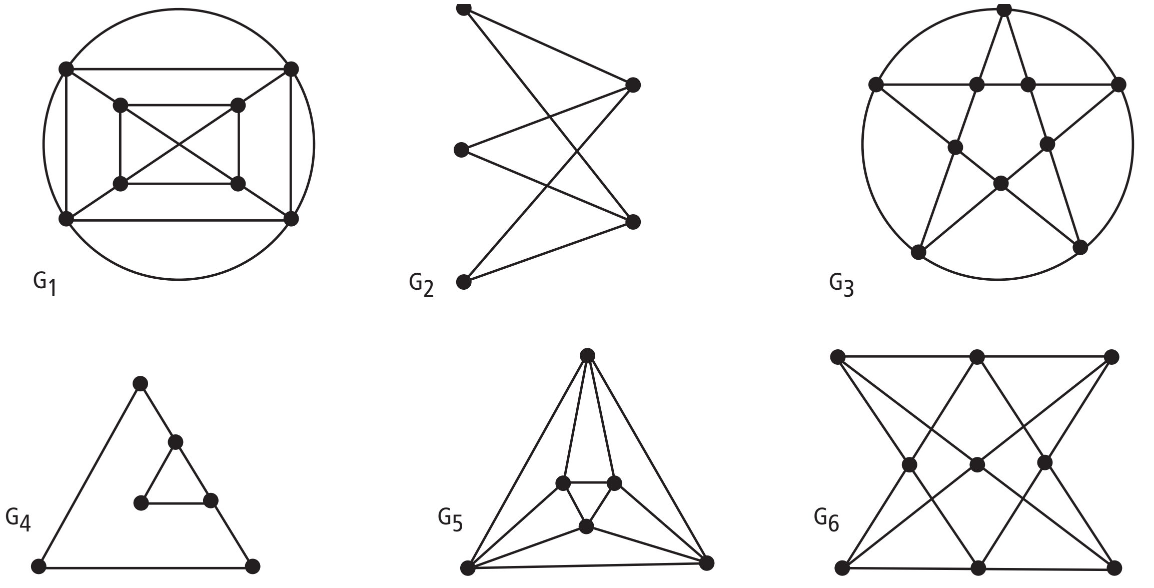


Fig. 34

1. Préciser l'ordre ainsi que le nombre d'arêtes de chaque graphe.
2. Peut-on trouver des arêtes multiples sur l'un des graphes ?
3. Déterminer les graphes :

- qui n'admettent pas de chaîne eulérienne ;
- qui admettent une chaîne eulérienne ;
- qui admettent un cycle eulérien.

Exercice 2 Le graphe G de la figure 35 est un graphe biparti car ses sommets sont divisés en deux classes C_1 et C_2 de telle manière que deux sommets d'une même classe ne soient jamais adjacents.

1. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.
2. Montrer que le graphe G est planaire.

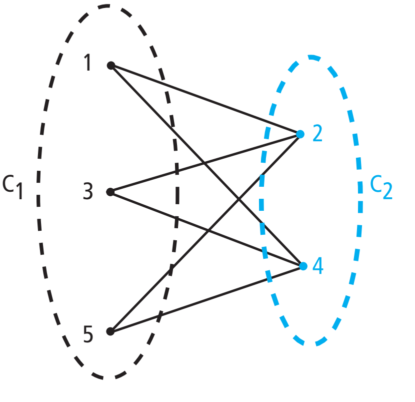


Fig. 35

Exercice 3 Le graphe G de la figure 36 possède 3 faces appelées F_1, F_2 et F_3.

On appelle **face d'un graphe planaire connexe** toute région du plan limitée par des arêtes et telle que deux points quelconques de cette région peuvent toujours être reliés par un trait continu qui ne coupe aucune arête.

Deux faces du graphe, F_1 et F_2, sont finies alors que la face F_3 est infinie.

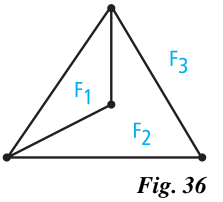


Fig. 36

❶ On considère le graphe G_5 de la figure 34.

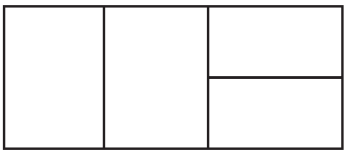
Donner le nombre de faces de G_5.

❷ On appelle A le nombre d'arêtes, S le nombre de sommets et F le nombre de faces du graphe G_5.

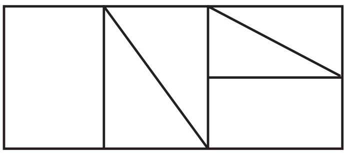
Vérifier sur cet exemple la formule, dite formule d'Euler : $F - A + S = 2$.

Exercice 4

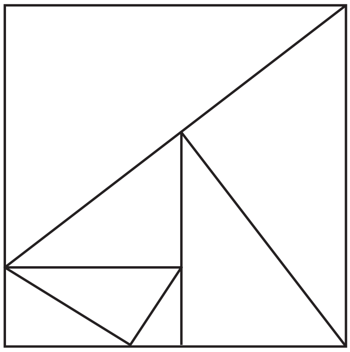
On considère les trois figures a, b et c suivantes :



a



b



c

Fig. 37

❶ Peut-on, sur chacune des trois figures, parcourir une fois et une seule chaque segment sans jamais lever le crayon ?

❷ Peut-on, sur chacune des trois figures, tracer une ligne continue coupant une fois et une seule chacun des segments sans lever le crayon ?

❸ On considère maintenant uniquement la figure c.

On veut colorier les **15 segments** de la manière suivante :

▶ chaque fois que l'on doit lever le crayon on choisit une nouvelle couleur.

a) Peut-on faire un coloriage unicolore (une seule couleur) ?

b) Combien faut-il de couleurs au minimum ?

c) Quelle est la longueur maximale d'une chaîne simple unicolore ?

Donner un exemple d'une telle chaîne.

Remarque

La figure c représente un tableau (toile de 1,50 m sur 1,50 m) de l'artiste suisse Max Bill (1908-1994).
Ce tableau est intitulé « 7 couleurs à 7 triangles rectangles dans le carré », 1980-1982.

Exercice 5

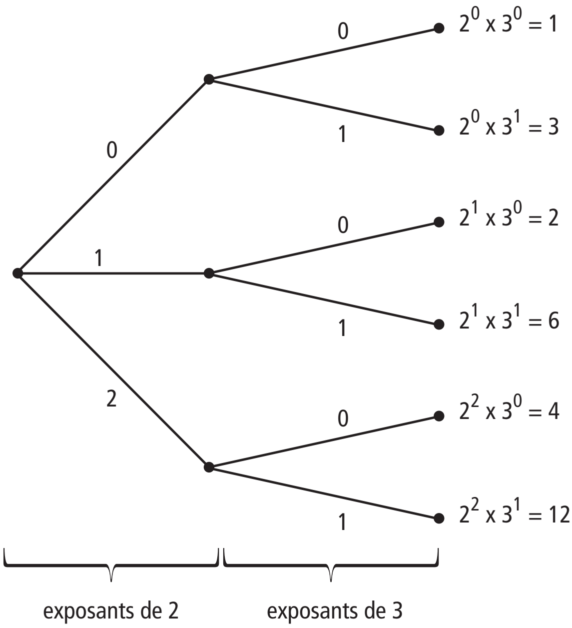
On est parfois amené à chercher la liste des diviseurs d'un nombre entier. Si on sait trouver des diviseurs d'un nombre on n'est pas toujours certain de les avoir tous trouvés, surtout si le nombre est assez grand.

▶ Donnons d'abord un exemple en prenant $N = 12$.

On décompose N en facteurs premiers en le divisant, autant de fois qu'on peut, par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, ...

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{D'où} \qquad 12 = 2^2 \times 3.$$

On obtient tous les diviseurs de 12 à l'aide d'un arbre.



L'ensemble D_{12} des diviseurs de 12 est :
$D_{12} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$.

▶ Déterminer, en faisant un arbre des diviseurs, l'ensemble des diviseurs de 72.

Remarque *Un* ***arbre*** *est un graphe dans lequel deux sommets quelconques sont reliés par une et une seule chaîne élémentaire.*

Un ***arbre*** *est donc un graphe connexe sans cycle.*

Exercice 6

On définit un graphe G par la liste S de ses sommets et par la liste A de ses arêtes.

$S = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ et $A = \{1-2 ; 1-3 ; 1-4 ; 2-5 ; 3-5\}$

❶ Représenter graphiquement le graphe G.

❷ Déterminer le nombre chromatique du graphe G ainsi que son nombre de stabilité.

❸ Déterminer la matrice M associée au graphe G.

Exercice 7

Une chaîne de six magasins décide d'ouvrir le maximum de magasins en nocturne sous les contraintes suivantes :

▶ les magasins 1 et 2 ne peuvent pas être ouverts en même temps ;

▶ parmi les magasins 2, 3, 4 au plus un peut être ouvert en nocturne ;

▶ parmi les magasins 4, 5, 6 au plus un peut être ouvert en nocturne.

Trouver comment on peut maximiser le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes. Si plusieurs possibilités existent on les donnera toutes.

Exercice 8

Un jury composé de 5 examinateurs doit faire passer un oral à 5 étudiants A, B, C, D et E. Voici le tableau donnant les épreuves que chaque étudiant doit passer.

A	F	M	
B	F	H	
C	H	M	R
D	M	S	
E	S	F	R

F : Français
H : Histoire
M : Mathématiques
R : Russe
S : Sciences Économiques et Sociales

Un étudiant passe au maximum une épreuve par demi-journée.
Proposer un calendrier qui minimise la durée de l'examen oral.

Exercice 9 Lors de son congrès annuel l'Association des Professeurs de Mathématiques doit programmer 8 conférences : A, B, C, ..., H.

Les contraintes sont les suivantes :

- chaque conférence dure une demi-journée ;
- A se déroule la première demi-journée ;
- certaines conférences sont incompatibles, à savoir :

A–E–G ; A–D–H ; B–D ; B–E ; B–F ; C–E ; C–F ; C–H.

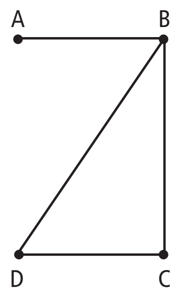
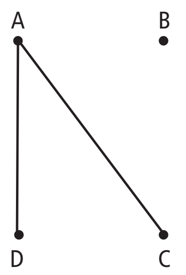
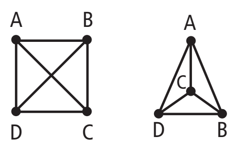
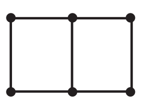
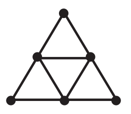
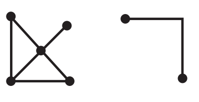
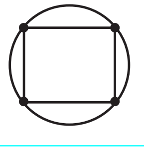
1. Vérifier que l'on peut organiser les conférences sur 2 jours, en mettant deux conférences par demi-journée et dans l'ordre alphabétique.

2. Peut-on organiser toutes les conférences sur trois demi-journées ? Si oui y-a-t'il plusieurs possibilités ?

3. On souhaite que la conférence inaugurale A et la conférence finale H ne se déroulent pas en parallèle avec d'autres conférences. Peut-on organiser les conférences sur 2 jours ? Si oui donner le nombre de possibilités.

Chapitre 2 Synthèse

Les figures suivantes vont permettre de revoir les notions essentielles rencontrées dans cette séquence sur les graphes. Par ailleurs un **lexique** est proposé à la fin de cette synthèse.

G_1		4 sommets : A ; B ; C ; D. Le graphe est d'ordre 4. 4 arêtes : A-B ; B-C ; C-D ; D-B. Degré : 1 pour A ; 3 pour B ; 2 pour C et D. Chaîne : A-B-C-D ; chaîne eulérienne : A-B-D-C-B. Cycle : D-B-C-D. La distance de B à D est égale à 1. Le diamètre de G_1 est égal à 2. Le graphe G_1 est simple, connexe et planaire. Le nombre chromatique est 3.
$\overline{G}_1$		$\overline{G}_1$ est le graphe complémentaire de G_1. G_1 et $\overline{G}_1$ n'ont aucune arête commune. $G_1 \cup \overline{G}_1$ est un graphe complet. B est un sommet isolé et $\overline{G}_1$ n'est pas connexe. C est un sommet pendant. $\{A, C, D\}$ est une composante connexe de $\overline{G}_1$. $\{B, C, D\}$ est un sous-graphe stable de $\overline{G}_1$.
G_2		Graphes complets, connexes, planaires, isomorphes. Pas de chaîne eulérienne. Les deux graphes sont d'ordre 4.
G_3		Graphe connexe, planaire. Il existe une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.
G_4		Graphe connexe, planaire. Il existe des cycles eulériens, des chaînes eulériennes.
G_5		Graphe d'ordre 7, non connexe. G_5 possède 2 composantes connexes.
G_6		G_6 possède des arêtes multiples. $f = 6$; $a = 8$; $s = 4$. Formule d'Euler : $f - a + s = 2$.

▶ Degrés des sommets

– La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

– La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est toujours un nombre pair.

– Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

▶ Chaîne eulérienne, cycle eulérien

– Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

– Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

– Si un graphe connexe possède 2 sommets de degré impair alors ces 2 sommets sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

– Pour tracer un cycle eulérien on peut partir de n'importe quel sommet du graphe.

▶ Graphe connexe, graphe complet

Un graphe complet est toujours connexe.

▶ Théorème des 4 couleurs

– On peut toujours colorier à l'aide de 4 couleurs une carte où des pays voisins sont de couleurs différentes.

– On peut toujours colorier les sommets d'un graphe planaire à l'aide de 4 couleurs de telle manière que chaque arête possède deux extrémités de couleurs différentes.

▶ Nombre chromatique

Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $D+1$, le nombre D étant égal au plus haut degré des sommets.

▶ Matrice associée à un graphe

Le nombre de 1 d'une matrice associée à un graphe sans arête multiple est égal à la somme des degrés de tous les sommets du graphe.

▶ Plus courte chaîne

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

Cet algorithme peut s'appliquer à tout graphe non orienté pondéré, c'est-à-dire à tout graphe dont les arêtes sont affectées de nombres positifs (appelés poids). Cet algorithme permet de calculer la longueur des plus courtes chaînes entre un sommet (qu'on peut appeler « entrée ») et tous les autres sommets.

Lexique pour les graphes non orientés

Adjacent Deux **sommets adjacents** (ou **voisins**) sont deux sommets reliés par au moins une arête.

Arbre Un **arbre** est un graphe dans lequel deux sommets quelconques sont reliés par une et une seule chaîne élémentaire.

Un **arbre** est donc un graphe connexe sans cycle.

Arête Une **arête** relie deux sommets d'un graphe. Ces deux sommets sont les extrémités de l'arête.

Arête multiple Si deux sommets sont reliés par au moins deux arêtes, chaque arête est une **arête multiple**.

Biparti Un **graphe biparti** est un graphe dont les sommets peuvent être divisés en deux classes de telle manière que deux sommets d'une même classe ne soient jamais adjacents.

Chaîne

- Une **chaîne** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arêtes.
- Une **chaîne élémentaire** est une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même **sommet**.
- Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une **chaîne simple** est une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même **arête**.

Complémentaire Deux **graphes complémentaires** n'ont aucune arête commune et leur réunion donne un graphe complet.

Composante connexe Une **composante connexe** est un sous-graphe connexe.

Un graphe connexe a une seule composante connexe.

Cycle Un **cycle** est une chaîne fermée simple (la chaîne revient à son point de départ).

Un **cycle élémentaire** est un cycle qui n'utilise pas deux fois le même sommet, à l'exception de celui de départ.

Degré Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet comme extrémité.

Diamètre Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets de ce graphe.

Distance La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.

Eulérien (ou Eulérienne)

- Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque **arête** du graphe.
- Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque **arête** du graphe.
- Un **graphe eulérien** est un graphe qui possède un cycle eulérien.

Graphe

▶ Un **graphe** est un ensemble de points appelés sommets, certains étant éventuellement reliés entre eux par des arêtes.

▶ Un **graphe simple** est un graphe qui ne contient pas d'arête multiple.

▶ Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

▶ Un **graphe connexe** est un graphe dont chaque sommet est relié à chacun des autres sommets par une chaîne. Dans un graphe connexe il n'y a ni point isolé, ni section du graphe isolée.

▶ Un **graphe planaire** est un graphe que l'on peut dessiner dans un plan sans que ses arêtes ne se croisent.

Longueur

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

Matrices

▶ **Matrice associée à un graphe G d'ordre n.**

Les sommets étant numérotés de 1 à n c'est une matrice symétrique à n lignes et n colonnes.

Le terme a_{ij} au croisement de la ligne i et de la colonne j vaut k, k étant le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

▶ **Matrice booléenne**

Une **matrice booléenne** est une matrice dont les termes sont, soit 0, soit 1.

Nombre chromatique

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.

Nombre de stabilité

Le **nombre de stabilité** d'un graphe G est l'ordre du plus grand sous-graphe stable de G.

Ordre

L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Poids

Le **poids** d'une arête est un nombre positif affecté à cette arête.

Le **poids** d'une chaîne dans un graphe pondéré est la somme des « poids » des arêtes qui la composent.

Pondéré

Un **graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de poids.

Plus courte chaîne

Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est, parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

Sommet

Un **sommet** est une des extrémités d'une arête ou un point isolé d'un graphe.

Un **sommet isolé** est un sommet de degré 0.

Un **sommet pendant** est un sommet de degré 1.

Sous-graphe

Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes reliant ces sommets dans G.

Stable

Un **sous-graphe stable** est un sous-graphe sans arête.

3 Chapitre — Exercices d'entraînement

Exercice 10 Comparer les quatre graphes G_1, G_2, G_3, G_4 définis comme suit :

- G_1

On considère un octaèdre (c'est un solide à 8 faces) : les sommets du graphe sont les sommets de l'octaèdre et les arêtes du graphe sont les arêtes de l'octaèdre.

- G_2

On considère un cube : les sommets du graphe sont associés aux faces du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune.

- G_3

Les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et deux sommets sont reliés par une arête si leur intersection est non vide.

- G_4

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions et chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

Exercice 11 Caractériser les graphes connexes de diamètre 1.

Exercice 12 Le graphe G représenté sur la figure 38 est un graphe complet biparti.

On va montrer que ce graphe ne peut pas être planaire, c'est-à-dire qu'il est impossible d'en donner une représentation où les arêtes ne se croisent pas.

Pour cela, on va faire un raisonnement par l'absurde : on va supposer que le graphe est planaire et montrer que cela mène à une contradiction.

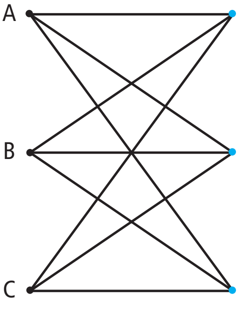


Fig. 38

On suppose que le graphe G est planaire.

❶ Quel serait, d'après la formule d'Euler, le nombre f de faces ?

❷ Dire pourquoi dans ce graphe biparti aucune face ne peut être de forme triangulaire. Quel est donc le nombre minimum d'arêtes de chaque face ?

❸ Comparer 4f et 2a où a est le nombre d'arêtes. En déduire une contradiction et conclure.

❹ Application. Le problème des trois villas et des trois usines.

On suppose que :

- A, B et C sont trois villas ;
- 1 est une usine de production d'eau ;
- 2 est une usine de production de gaz ;
- 3 est une usine de production d'électricité.

Montrer qu'il est impossible de placer les 9 conduites dans un plan sans qu'au moins deux ne se croisent.

Remarque *Ce graphe G est souvent désigné par $K_{3,3}$. Les deux nombres 3 indiquent que chaque classe contient 3 sommets. La lettre K est l'initiale du nom du mathématicien polonais Kazimierz KURATOWSKI (1896-1980).*
C'est ce graphe qui a permis à Kuratowski, en 1930, de donner une caractérisation des graphes planaires.

Exercice 13 Déterminer pour chacun des graphes G_1 et G_2 le nombre chromatique.

Conjecturer pour chacun des graphes G_1 et G_2 le nombre de stabilité.

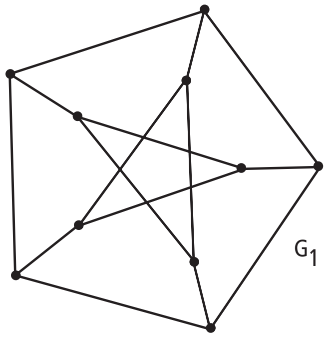


Fig. 39

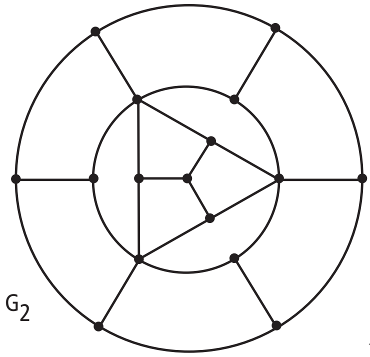


Fig. 40

Exercice 14 Les lettres A, B, C, ..., H désignent huit poissons. Dans le tableau de la **figure 41** un point signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans un même aquarium.

❶ Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

❷ Peut-on répartir « équitablement » les poissons (c'est-à-dire 2 par aquarium) ?

❸ Quel est le nombre maximal de poissons que l'on peut mettre dans un même aquarium ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		•	•	•			•	•
B	•				•	•	•	
C	•			•		•	•	•
D	•		•		•			•
E		•		•		•	•	
F		•	•		•			
G	•	•	•		•			
H	•		•	•				

Fig. 41

Exercice 15 On considère le graphe G suivant (voir **figure 42**) :

❶ Trouver tous les sous-graphes complets de G ayant plus de deux sommets.

❷ Trouver le nombre chromatique et le nombre de stabilité de G.

❸ On appelle $\overline{G}$ le graphe complémentaire de G et G′ le graphe complet ayant les mêmes sommets que G. Les sommets de $\overline{G}$ sont les sommets de G et les arêtes de $\overline{G}$ sont toutes les arêtes de G′ qui ne sont pas dans G.

a) Dénombrer le nombre d'arêtes de G′ et de $\overline{G}$.

b) Montrer que G et $\overline{G}$ sont isomorphes.

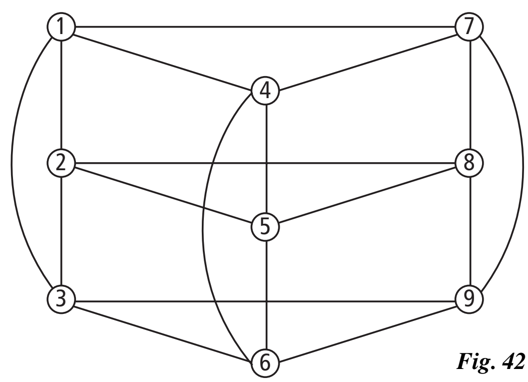


Fig. 42

Exercice 16 Un examen écrit comporte sept épreuves que l'on désignera par U, V, W, X, Y, Z, T. Les épreuves que doivent passer les six étudiants A, B, C, D, E, F sont données dans le tableau suivant :

A	X Y V T	D	U T
B	T Z	E	X U
C	Y Z	F	Y T W

Un étudiant passe au maximum une épreuve par jour et une épreuve n'est organisée qu'une fois.

❶ En combien de jours minimum peut-on organiser cet examen ?

❷ Quel nombre maximum d'épreuves peut-on organiser dans une journée ?

Exercice ⑰ On considère le graphe suivant :

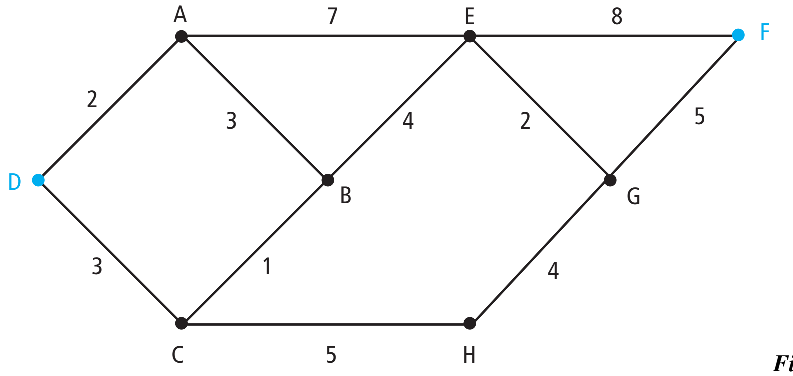


Fig. 43

Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, la plus courte chaîne entre les sommets D et F.

4 Chapitre — Aide aux exercices d'entraînement

Exercice 10

▶ Pour G_1 on peut imaginer un tétraèdre dans l'espace et le dessiner dans le plan. Le graphe obtenu a 6 sommets et 12 arêtes.

▶ Pour G_2 on peut commencer par dessiner un cube comme on se le représente dans l'espace. On peut prendre chaque centre d'une face comme un sommet du graphe.

▶ Pour G_3 on trouve encore 6 sommets et 12 arêtes. On peut mettre G_3 exactement sous la même forme que G_1.

▶ Pour G_4 on trouve encore 6 sommets (les espions) et 12 arêtes (les rencontres possibles). On peut aussi mettre G_4 sous la même forme que G_1.

Exercice 11

On cherche les graphes dont la plus grande distance entre deux sommets quelconques est égale à 1.

Exercice 12

❶ On applique la formule d'Euler pour les graphes planaires, c'est-à-dire $f - a + s = 2$.

❷ Dans une même classe deux sommets ne sont jamais reliés par une arête.

❸ Chaque face ayant au moins 4 arêtes on en déduit que 4f est inférieur ou égal au double du nombre d'arêtes.

❹ Simple application des questions précédentes.

Exercice 13

On essaie de colorier G_1 avec deux couleurs mais on se rend compte que ce n'est pas possible. On essaie alors 3 couleurs.

On essaie de colorier G_2 avec deux couleurs et on y arrive.

Pour G_1 on arrive à colorier 4 sommets de la même couleur mais pas davantage.

Pour G_2 on colorie 9 sommets d'une couleur et 7 de l'autre.

Exercice 14

❶ On modélise par un graphe ayant 8 sommets (les poissons). On cherche ensuite le nombre chromatique après avoir tracé les arêtes d'incompatibilité.

❷ On cherche à placer chaque couleur sur 2 sommets.

❸ On cherche un sous-graphe stable d'ordre maximal.

Exercice 15

❶ On observe plusieurs sous-graphes complets « triangulaires ».

❷ Il faut au minimum 3 couleurs et 3 couleurs suffisent.

❸ **a)** Chaque sommet est relié à 4 autres sommets. Pour obtenir les arêtes qui manquent dans G' on relie chaque sommet aux 4 sommets auxquels il n'est pas déjà relié.

b) On peut disposer $\bar{G}$ comme G à condition de modifier la place des sommets.

Exercice 16

❶ On modélise par un graphe dont les sommets sont les 7 épreuves. On trace des arêtes d'incompatibilité et on cherche le nombre chromatique.

❷ On cherche le sous-graphe stable d'ordre maximal. On a 5 sommets qui sont automatiquement coloriés, reste les 2 autres.

Exercice 17

Pour l'algorithme de Dijkstra voir le paragraphe **G** 2. ■