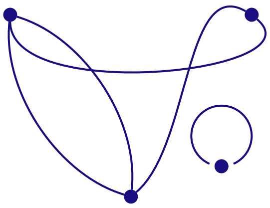
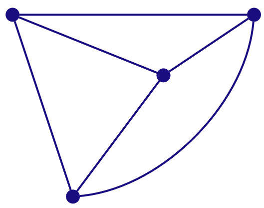
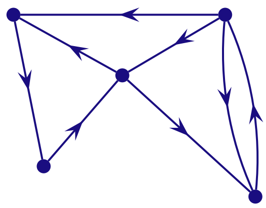
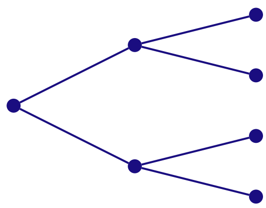
De manière générale, un graphe est un ensemble de sommets et d'arêtes (ou arcs) reliant ces sommets.
Il existe différents types de graphes, orientés ou non, ou autorisant plusieurs arcs entre deux sommets.


Graphe G_1


Graphe G_2


Graphe G_3


Graphe G_4

1 DÉFINITIONS

Un graphe non orienté $G = (S,A)$ est déterminé par la donnée de deux ensembles :
- un ensemble fini non vide S dont les éléments sont appelés *sommets*
- un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes*.

Si $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe G, une arête a de l'ensemble A s'écrit $a = \{x_i, x_j\}$ où x_i et x_j sont les *extrémités* de a.
Les sommets x_i et x_j sont alors *adjacents* dans le graphe G et on dit qu'ils sont *incidents* avec l'arête a.
Lorsque les deux extrémités sont confondues $(x_i = x_j)$ l'arête s'appelle une *boucle*.
Deux arêtes sont dites parallèles lorsqu'elles ont mêmes extrémités.

ORDRE D'UN GRAPHE

On appelle ordre d'un graphe le nombre (n) de sommets de ce graphe.

Par exemple :
les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4 ; le graphe G_3 est d'ordre 5 et le graphe G_4 est d'ordre 7.

GRAPHE SIMPLE

Un graphe est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

GRAPHE ORIENTÉ

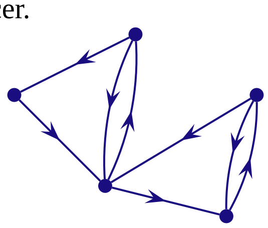
Un graphe peut être orienté une arête est alors appelée un *arc*. Un arc est défini par un couple ordonné (x_i, x_j) de sommets.

REMARQUE

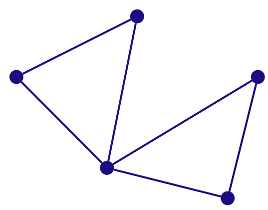
À tout graphe orienté, on peut associer un graphe simple.

Par exemple sur un plan de ville où sont indiquées les rues en sens uniques, un piéton ne tiendra pas compte de l'orientation pour se déplacer.

Au graphe orienté

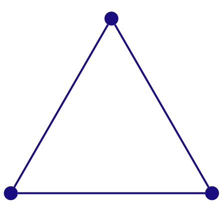


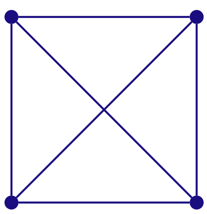
on associe le graphe simple

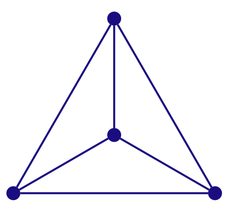


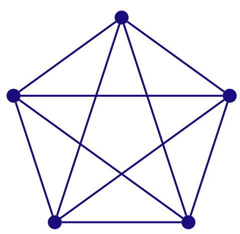
GRAPHE COMPLET

Un graphe complet K_n est un graphe simple d'ordre $n \geqslant 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.


K_3




Deux représentations du K_4

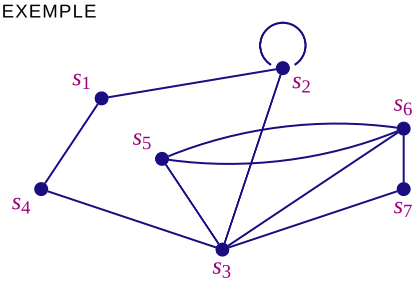

K_5

SOUS GRAPHE

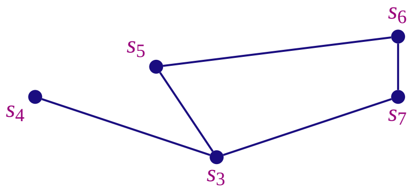
Il arrive que dans certains problèmes on ait besoin de considérer une partie d'un graphe :

$G' = (S', A')$ est un sous-graphe de $G = (S, A)$ si S' est un sous ensemble de S et A' un sous ensemble de A tel que les extrémités des arêtes de A' sont des sommets de S'.
Si A' est constitué de toutes les arêtes de A ayant pour extrémités les sommets de S' alors on dit que $G' = (S', A')$ est le sous-graphe engendré par S'.

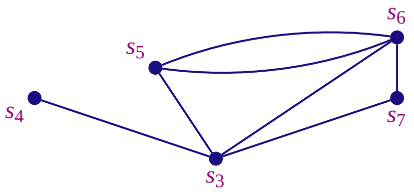
EXEMPLE



Graphe G



G_1 est un sous graphe de G



G_2 est le sous graphe de G engendré par $\{S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$

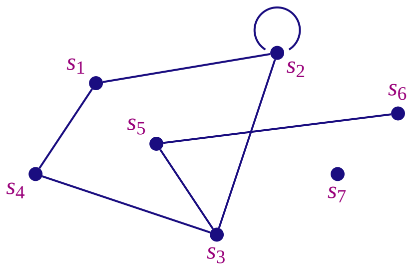
2 DEGRÉ D'UN SOMMET

On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$d(s_1) = 2$
$d(s_2) = 4$
$d(s_3) = 2$
$d(s_4) = 3$
$d(s_5) = 2$
$d(s_6) = 1$
$d(s_7) = 0$



DEGRÉ D'UN SOMMET DANS UN GRAPHE ORIENTÉ

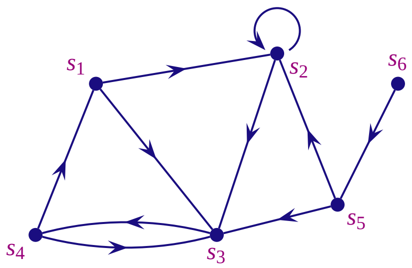
Soit s un sommet d'un graphe orienté G.
– On note $d^+(s)$ le degré extérieur du sommet s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
– On note $d^-(s)$ le degré intérieur du sommet s, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant s comme extrémité finale.
Le degré du sommet s est :

$$d(s) = d^+(s) + d^-(s)$$

EXEMPLE

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

$d^+(s_1) = 2$ et $d^-(s_1) = 1$ d'où $d(s_1) = 3$
$d^+(s_2) = 2$ et $d^-(s_2) = 3$ d'où $d(s_2) = 5$
$d^+(s_3) = 1$ et $d^-(s_3) = 4$ d'où $d(s_3) = 5$
$d^+(s_4) = 2$ et $d^-(s_4) = 1$ d'où $d(s_4) = 3$
$d^+(s_5) = 2$ et $d^-(s_5) = 1$ d'où $d(s_5) = 3$
$d^+(s_6) = 1$ et $d^-(s_6) = 0$ d'où $d(s_6) = 1$



REMARQUE

Dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs et la somme des degrés intérieurs sont égales au nombre d'arcs.
Si on note a le nombre d'arcs d'un graphe orienté alors $\sum d^+(s) = \sum d^-(s) = a$.

Par exemple si dans une réunion on échange des cadeaux, le nombre de cadeaux offerts est égal au nombre de cadeaux reçus, c'est le nombre de cadeaux échangés.

THÉORÈME

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.

Démonstration

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

COROLLAIRE

Dans un graphe, le nombre de sommets impairs est un entier pair.

Démonstration

Soit p la somme des degrés des sommets pairs et m la somme des degrés des sommets impairs.
$m+p$ est égal à la somme des degrés des sommets c'est donc un nombre pair donc m est un nombre pair.
Or une somme d'entiers impairs est paire si, et seulement si, il y a un nombre pair de termes.
On en déduit que le nombre de sommets impairs est un entier pair.

PROPOSITION

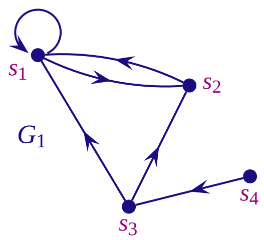
Dans un graphe simple d'ordre $n > 1$, il existe deux sommets distincts s_i et s_j ayant le même degré.

Démonstration
Soit G un graphe simple d'ordre $n > 1$. Le degré d'un sommet s quelconque du graphe G est un entier $d(s)$ tel que : $0 \leqslant d(s) \leqslant n-1$.
Supposons que les degrés des sommets soient différents.
Les degrés des n sommets sont les entiers $\{0,1,\cdots,n-1\}$ et il existe un sommet s_i de degré 0 et un sommet s_j de degré $n-1$.
Or si $d(s_j) = n-1$ cela signifie qu'il est adjacent à tous les sommets du graphe et en particulier au sommet s_i donc $d(s_i) \geqslant 1$
Ce qui est en contradiction avec $d(s_i) \geqslant 0$.

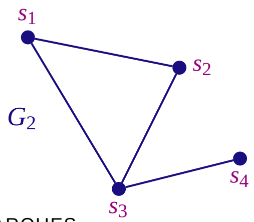
3 REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UN GRAPHE

Soit $G = (S,A)$ un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j.
Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au nombre d'arcs ayant pour origine le sommet s_i et pour extrémité finale le sommet s_j.

EXEMPLES

1. 

La matrice d'adjacence du graphe orienté G_1 est $M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. 

La matrice d'adjacence du graphe simple G_2 est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

REMARQUES

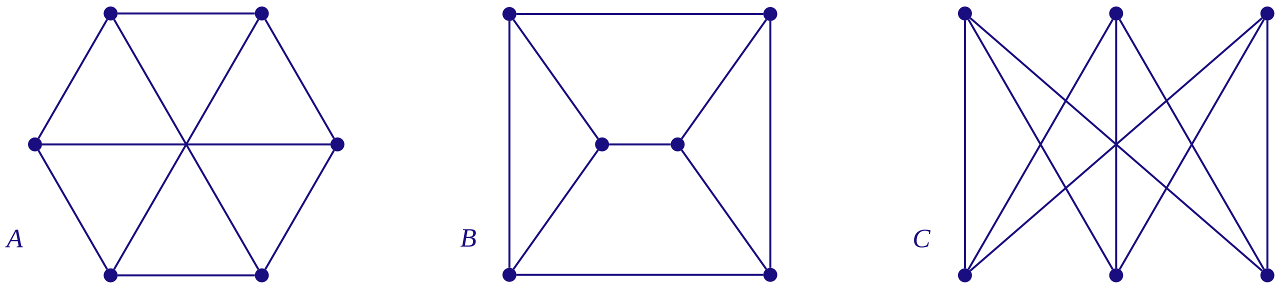
1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.
3. La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au nombre d'arêtes de ce graphe.
4. La somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est égale au nombre d'arcs de ce graphe.
   – La somme des coefficients de la ligne i est égale au nombre de successeurs du sommet s_i.
   – La somme des coefficients de la colonne i est égale au nombre de prédécesseurs du sommet s_i.

4 GRAPHES ISOMORPHES

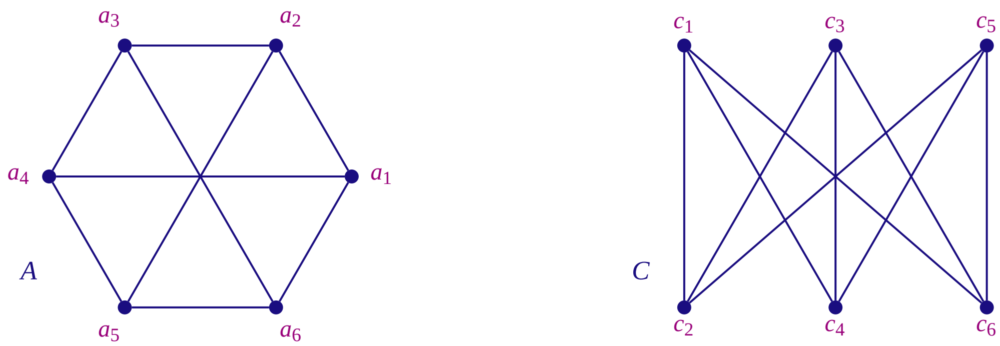
Deux graphes isomorphes ont la même structure : peu importe la façon dont ils sont dessinés, il est possible de déplacer les sommets pour que l'un soit la copie conforme de l'autre.

EXEMPLE

Considérons les trois graphes ci-dessous :



Les trois graphes ont le même ordre (6), le même nombre d'arêtes (9) et les sommets des trois graphes sont tous de degré 3.
Or dans B il y a deux sous graphes complets d'ordre 3 ce qui n'est pas le cas pour les graphes A et C. Donc B n'est pas isomorphe à A et C.
Montrons que les graphes A et C sont isomorphes.



Les sommets étant numérotés comme indiqué ci-dessus les deux graphes ont la même matrice d'adjacence :

$$M_A = M_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

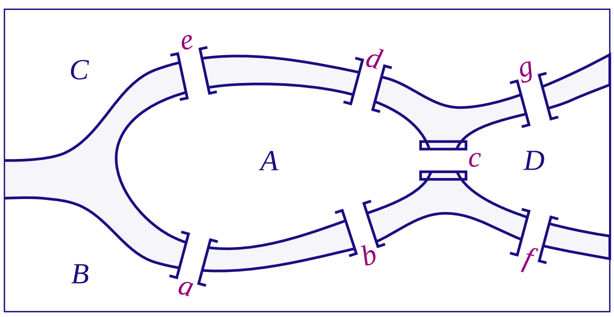
Donc A et C sont isomorphes.

REMARQUES

- Le graphe B est *planaire* : on peut le dessiner sans que ses arêtes se croisent.
- Le graphe C (ou A) est un graphe *biparti* : il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête du graphe a une extrémité dans X et l'autre dans Y.
  Ce n'est pas un graphe planaire, il est impossible de le dessiner sans que ses arêtes se croisent.

ACTIVITÉ

Voici un plan de la ville de Königsberg :

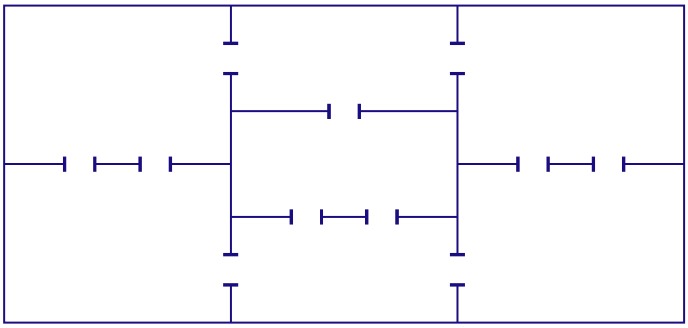


Est-il possible de se promener en ne passant qu'une seule fois sur chacun des sept ponts ?

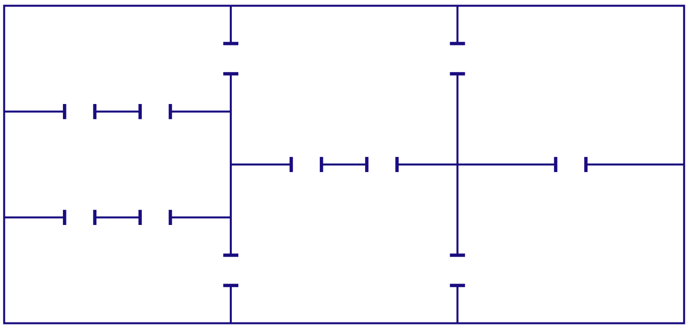
ACTIVITÉ 1

Voici le plan de trois étages d'un musée. À chaque étage, un visiteur se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.
Pour chacun des étages :
Est-il possible de faire le tour de l'étage en passant exactement une seule fois par chacune des portes ?
Dans ce cas, où faut-il placer les portes d'entrée et de sortie de l'étage pour que ce parcours reste possible ?

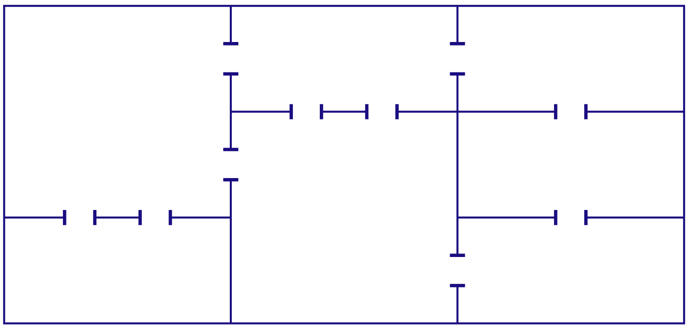
1er étage



2^{e} étage



3^{e} étage



Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

1 DÉFINITIONS

Soit $G = (S,A)$ un graphe non orienté. Une chaîne est une liste finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la liste. Le premier et le dernier élément de la liste sont les extrémités initiale et finale de la chaîne.

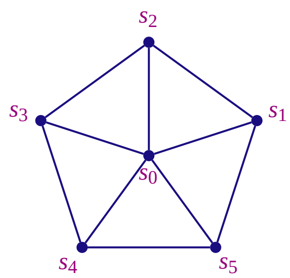
Si le graphe est simple, on peut définir une chaîne par la liste de ses sommets ou de ses arêtes.

1. La *longueur d'une chaîne* est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
2. Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une *chaîne simple*.
3. Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
4. Une *chaîne est fermée* si l'origne et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
5. Une chaîne fermée est un *cycle* si elle est composées d'arêtes toutes distinctes.

REMARQUE

Les défnitions précédentes, peuvent être transposées au cas des graphes orientés.
On parlera de *chaîne orientée* ou *chemin* et de *cycle orienté* ou *circuit*.

EXEMPLE



Dans le graphe ci-contre :
- La chaîne $\{s_0 ; s_1 ; s_0 ; s_2 ; s_0 ; s_3 ; s_0 ; s_4 ; s_0 ; s_5 ; s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.
- La chaîne $\{s_1 ; s_2 ; s_3 ; s_0 ; s_4 ; s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.
- La chaîne $\{s_1 ; s_2 ; s_0 ; s_3 ; s_4 ; s_0 ; s_5 ; s_1\}$ est un cycle de longueur 7.

2 CHAÎNES DE LONGUEUR DONNÉE

NOMBRE DE CHAÎNES

Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence.
Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i,j de la matrice M^n.

DISTANCE

Soit G un graphe ; si x et y sont deux sommets de G, la distance de x à y notée $d(x,y)$, est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y.

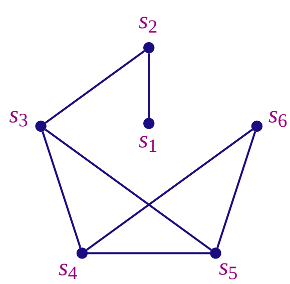
REMARQUES
- La distance d'un sommet à lui même est nulle.
- S'il n'existe pas de chaînes joignant deux sommets x et y, la distance de x à y est infinie.

DIAMÈTRE

On appelle diamètre d'un graphe la plus grande des distances entre deux sommets du graphe.

EXEMPLE

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre



On obtient les nombres de chaînes de longueurs données en calculant les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 chaînes fermées de longueur 2 d'origine le sommet s_3, 5 chaînes de longueur 3 entre les sommets s_4 et s_6 et 2 chaînes de longueur 4 entre les sommets s_1 et s_6.

La matrice des distances entre les différents sommets est $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le diamètre du graphe est 4.

3 CONNEXITÉ

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G.

Autrement dit : Un graphe est connexe si on peut atteindre n'importe quel sommet à partir d'un sommet quelconque en parcourant différentes arêtes

ALGORITHME

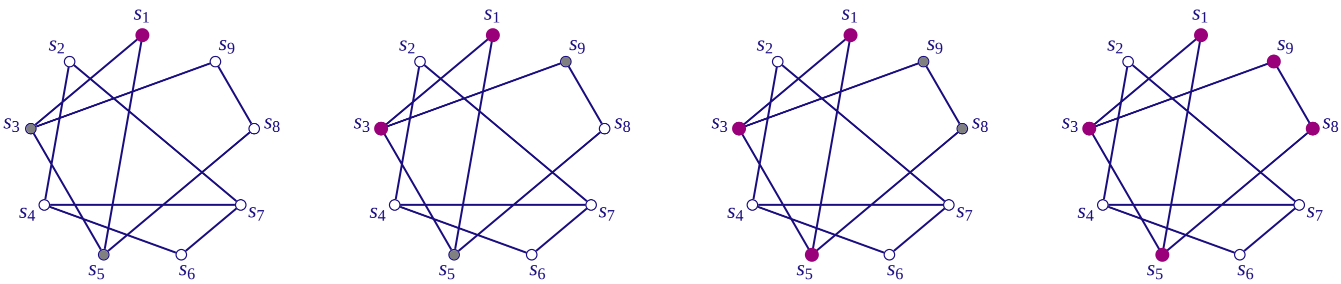
L'algorithme suivant permet de déterminer tous les sommets qui peuvent être atteints à partir d'un sommet.

Soit G un graphe et x un sommet de G :

Marquer provisoirement (*au crayon*) le sommet x ;
TANT_QUE *des sommets sont provisoirement marqués* **FAIRE**
  choisir un sommet y provisoirement marqué;
  marquer provisoirement les sommets adjacents non marqués;
  marquer définitivement (*à l'encre*) y;
FIN TANT_QUE

Si tous les sommets sont définitivement marqués alors le graphe est connexe, sinon on a obtenu *la classe de connexité* du sommet x.

La figure suivante illustre cet algorithme sur un graphe



Le graphe n'est pas connexe, il n'existe pas de chaîne entre les sommets s_1 et s_2.

4 CYCLE EULÉRIEN

DÉFINITION

Un cycle eulérien (*respectivement une chaîne eulérienne*) dans un graphe G est un cycle (*respectivement une chaîne*) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

THÉORÈME 1

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

Démonstration

Si le graphe possède 0 ou 1 sommet, la preuve est triviale, nous supposerons donc que l'ordre du graphe est supérieur ou égal à 2.
Si le graphe connexe admet un cycle eulérien alors en chaque sommet le cycle eulérien « entrant » dans le sommet doit « ressortir » et comme les arêtes du cycle ne peuvent être utilisées qu'une fois, chaque sommet est de degré pair.

Réciproquement :
Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair.
Comme G possède au moins deux sommets, tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe au moins un cycle dans G.

Formons un cycle C_1 dans G (chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes).

- Si C_1 contient toutes les arêtes du graphe alors G admet un cycle eulérien et le théorème est démontré.
- Dans le cas contraire, le sous graphe H de G défini par les arêtes non utilisées par C_1 a tous ses sommets de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet.

  Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle C_1. Soit x_i un tel sommet. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle C_2 dans H à partir de x_i.
  En insérant dans le cycle C_1 à partir du sommet x_i le cycle C_2,on obtient un cycle C_1'. Si ce cycle contient toutes les arêtes de G, C_1' est le cycle eulérien cherché.
  Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.

THÉORÈME 2

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne

Démonstration

Soit G un graphe connexe. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, alors le graphe G admet un cycle eulérien.
Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2. Soit s_i et s_j les deux sommets de degré impair.
Le graphe G' obtenu en ajoutant l'arête $s_i s_j$ au graphe G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. G' admet un cycle eulérien dont l'origine est le sommet s_i.
Par conséquent G contient une chaîne eulérienne qui commence en s_i et se termine en s_j.

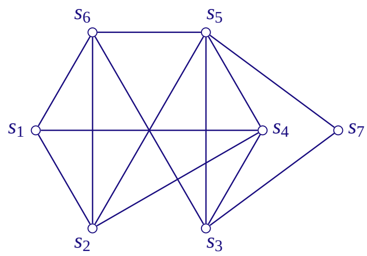
ALGORITHME

Les démonstrations précédentes permettent de construire une chaîne eulérienne dans un graphe connexe dont le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

SI *deux sommets sont de degré impair* **ALORS**
   construire une chaîne simple C ayant pour extrémités ces deux sommets ;
FIN SI
SI *tous les sommets sont de degré pair* **ALORS**
   construire un cycle C à partir d'un sommet quelconque ;
FIN SI
marquer les arêtes de C;
TANT_QUE *il reste des arêtes non marquées* **FAIRE**
   choisir un sommet x de C;
   SI *il existe un cycle d'origine x ne contenant aucune des arêtes marquées* **ALORS**
      marquer les arêtes du cycle d'origine x;
      remplacer dans C le sommet x par le cycle d'origine x;
   FIN SI
FIN TANT_QUE

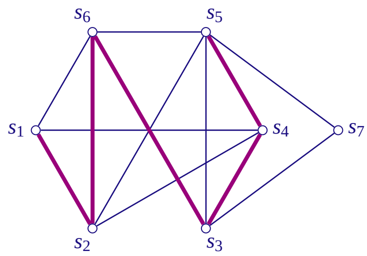
EXEMPLE

Le cycle $\{s_1\,;s_6\,;s_5\,;s_7\,;s_3\,;s_4\,;s_2\,;s_1\}$ contient tous les sommets du graphe G ci-contre.
Donc G est connexe.
Il n'y a que deux sommets de degré impair s_1 et s_5.
Il existe une chaîne eulérienne commençant d'extrémités s_1 et s_5.



ÉTAPE 1
Les deux sommets sont de degré impair sont s_1 et s_5
On construit une chaîne simple joignant ces deux sommets ;

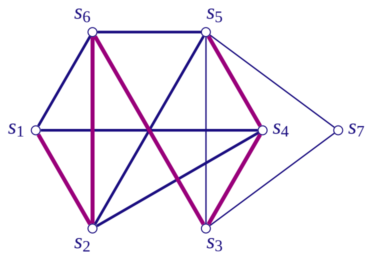
$$C = \{s_1\,;s_2\,;s_6\,;s_3\,;s_4\,;s_5\}$$



ÉTAPE 2
Le cycle simple $c_1 = \{s_2\,;s_4\,;s_1\,;s_6\,;s_5\,;s_2\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C.
On fusionne la chaîne C avec le cycle c_1 en remplaçant le sommet s_2 dans la chaîne C par le cycle c_1.

$$C = \{s_1\,;s_2\,;s_4\,;s_1\,;s_6\,;s_5\,;s_2\,;s_6\,;s_3\,;s_4\,;s_5\}$$

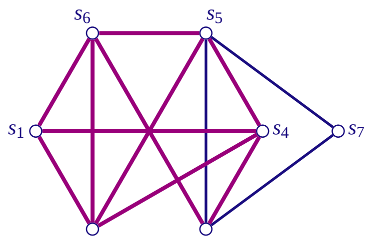
Il reste encore des arêtes non marquées, on recommence l'étape 2



Le cycle $c_2 = \{s_3\,;s_7\,;s_5\,;s_3\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C.
On fusionne la chaîne C avec le cycle c_2 en remplaçant le sommet s_3 dans la chaîne C par le cycle c_2.

$$C = \{s_1\,;s_2\,;s_4\,;s_1\,;s_6\,;s_5\,;s_2\,;s_6\,;s_3\,;s_7\,;s_5\,;s_3\,;s_4\,;s_5\}$$

Toutes les arêtes sont marquées C est une chaîne eulérienne.



III COLORATION DES SOMMETS D'UN GRAPHE

La coloration des sommets d'un graphe est une fonction qui attribue une couleur à chaque sommet de telle sorte que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Une *k-coloration* d'un graphe G est une coloration des sommets de G utilisant k couleurs.

REMARQUE

Un sous-graphe est *stable* si ses sommets ne sont reliés par aucune arête.
Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k sous graphes stables.

1 NOMBRE CHROMATIQUE

Le *nombre chromatique* noté $\chi(G)$ d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets, de sorte que deux sommets adjacents distincts ne soient pas de la même couleur.

EXEMPLE

Soit E un ensemble de candidats à un examen et X l'ensemble de toutes les épreuves possibles. Tous les candidats devant passer une épreuve x_i la passe ensemble.
Chaque candidat ne passe qu'une épreuve par jour. Quel est le nombre minimum de jours nécessaires pour tous les candidats passent leurs examens ?
En prenant X comme ensemble de sommets et en traçant une arête entre les sommets x_i et x_j lorsqu'un candidat au moins est inscrit aux deux épreuves x_i et x_j, le problème revient à chercher le nombre chromatique du graphe.

CAS PARTICULIERS

1. Pour le graphe complet K_n le nombre chromatique est n.

   Démonstration

   Comme un sommet donné est adjacent aux $n-1$ autres sommets, il faut au moins n couleurs pour obtenir une coloration valide de Kn.
   Avec n couleurs (une pour chaque sommet), on obtient une coloration de K_n et $\chi(K_n) = n$.

2. Le nombre chromatique d'un cycle est 2 si la longueur de ce cycle est paire, 3 si la longueur de ce cycle est impaire.

Cycle pair — Cycle impair

2 ENCADREMENT DU NOMBRE CHROMATIQUE

On ne connaît pas de formule permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps, il faut se contenter d'un encadrement du nombre chromatique.

Soit G est un graphe, on note $d(G)$ le plus grand des degrés des sommets alors : $\chi(G) \leqslant d(G)+1$.
Pour tout sous graphe H de G : $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.

Démonstration

– Soit $d(G)$ le degré maximum des sommets d'un graphe G. Considérons une liste de $(d(G)+1)$ couleurs. Chaque sommet x du graphe est adjacent à $d(G)$ sommets au plus, ses voisins utilisent au maximum $d(G)$ couleurs, le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est donc inférieur ou égal à $d(G)$. Il reste donc au moins une couleur non utilisée dans la liste de couleurs, avec laquelle nous pouvons colorer le sommet x. Ainsi, $\chi(G) \leqslant d(G)+1$.
– Soit H un sous graphe de G. Si une coloration de H nécessite k couleurs, il en va au moins de même pour le graphe G et $\chi(G) \geqslant k$.

3 Coloration gloutonne

Colorier de façon gloutonne un graphe G revient à colorer les sommets de G les uns après les autres avec la plus petite couleur disponible qui ne soit pas déjà celle d'un sommet adjacent.

ALGORITHME DE WELSH ET POWELL

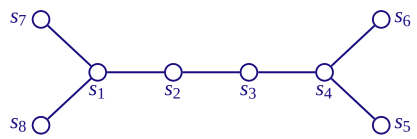
Soit G un graphe d'ordre n, l'algorithme de Welsh & Powell consiste à colorer le graphe en visitant les sommets par ordre de degré décroissant.

X est la liste des n sommets triés par ordre de degré décroissant, C est la liste des couleurs utilisées ;
POUR_CHAQUE *sommet* $x \in X$ **FAIRE**
    POUR_CHAQUE *couleur c de la liste C dans l'ordre de création* **FAIRE**
        SI *le sommet x n'est adjacent à aucun sommet colorié par c* **ALORS** x est colorié avec la couleur c;
    FIN POUR_CHAQUE
    SI *le sommet x n'est pas colorié* **ALORS**
        on ajoute une nouvelle couleur c' à la liste C des couleurs;
        le sommet x est colorié avec la couleur c';
    FIN SI
FIN POUR_CHAQUE

EXEMPLE

On dresse la liste X des sommets rangés par ordre de degré décroissant

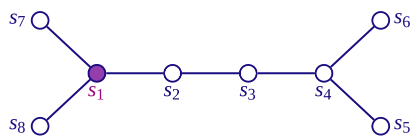
$$X = \{s_1 ; s_4 ; s_2 ; s_3 ; s_5 ; s_6 ; s_7 ; s_8\}$$



La liste C des couleurs utilisées est vide $C = \{\varnothing\}$

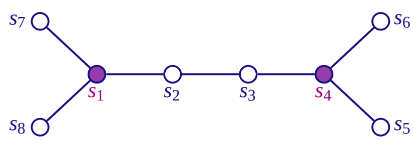
ÉTAPE 1

Le sommet s_1 n'est pas colorié.
On ajoute la couleur c_1 à la liste des couleurs $C = \{c_1\}$
On attibue la couleur c_1 au sommet s_1



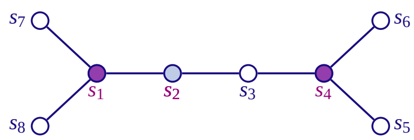
ÉTAPE 2

Le sommet s_4 n'est pas adjacent au sommet s_1, il reçoit la couleur c_1



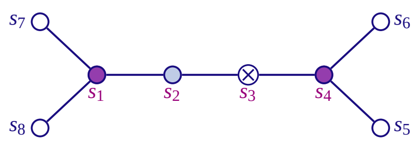
ÉTAPE 3

Le sommet s_2 est adjacent au sommet s_1, il ne reçoit pas la couleur c_1
On ajoute la couleur c_2 à la liste des couleurs $C = \{c_1 ; c_2\}$
On attibue la couleur c_2 au sommet s_2



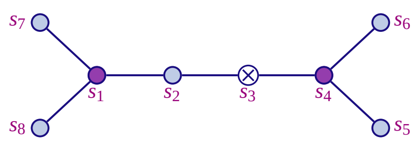
ÉTAPE 4

Le sommet s_3 est adjacent aux sommets s_4 et s_2, il ne peut recevoir les couleurs c_1 ou c_2
On ajoute la couleur c_3 à la liste des couleurs $C = \{c_1 ; c_2 ; c_3\}$
On attibue la couleur c_3 au sommet s_3

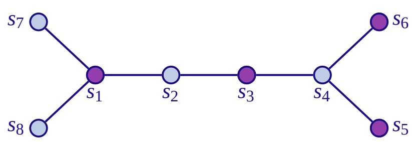


ÉTAPES 5-6-7-8

À chaque passage, les sommets s_5, s_6, s_7, s_8 peuvent recevoir la couleur c_2



L'algorithme donne une coloration avec 3 couleurs alors que deux couleurs suffisent



IV PLUS COURT CHEMIN

La recherche du meilleur itinéraire que ce soit en distance, en temps ou en coût d'un point à un autre peut être modélisée par la recherche du plus court chemin dans un graphe.
Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe entre deux sommets donnés.

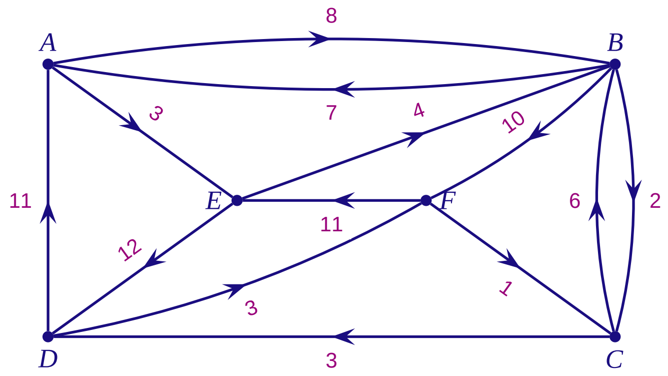
1 GRAPHE PONDÉRÉ

On appelle *graphe pondéré*, un graphe (orienté ou non) dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé poids (ou coût).
Par analogie avec la matrice d'adjacence, on peut définir la matrice des poids $P(a_{i,j})$ du graphe, dont les coefficients $a_{i,j}$ correspondent aux poids des arêtes (ou des arcs dans le cas d'un graphe orienté) :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{s'il n'existe pas d'arêtes (ou d'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \\ p_{ij} & \text{où } p_{ij} \text{ est le poids de l'arête (ou de l'arc) entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \end{cases}$$

On utilise le symbole ∞ pour indiquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets.

EXEMPLE



Les sommets du graphe étant rangés dans l'ordre alphabétique :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 7 & 0 & 2 & \infty & \infty & 10 \\ \infty & 6 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & 12 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LONGUEUR D'UN CHEMIN

> Soit $C(x,y)$ un chemin (ou une chaîne) dans un graphe pondéré G du sommet x vers le sommet y. La longueur de ce chemin est égale à la somme des poids de chacun arcs (ou de chacune des arêtes) qui le constituent.

REMARQUE

Cette définition généralise la définition de la longueur d'une chaîne dans un graphe non pondéré, il suffit d'attribuer un poids égal à 1 à chaque arête du graphe.

Dans l'exemple précédent, la longueur du chemin $AEBF$ est 17.
Si on souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F, on peut essayer d'énumérer tous les chemins ABF, $AEBF$, $AEDF$, $ABCDF$, $AEBCDF$ et calculer leurs longueurs. Mais avec un graphe de taille plus importante, ceci risque de devenir rapidement impossible.
Pour résoudre ce problème, on fait appel à des algorithmes.

En terminale ES, on n'étudie que le cas particulier où les poids de tous les arcs sont des réels positifs.

3 ALGORITHME DE DIJKSTRA

E. W. Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres dans un graphe pondéré dont tous les poids sont positifs.

L'algorithme comporte une phase d'initialisation. À chaque sommet on attribue un poids qui vaut 0 pour le sommet de départ et infini pour les autres sommets.

Le traitement de l'algorithme consiste à examiner les sommets les uns après les autres et à sélectionner le sommet x auquel on a affecté la plus petite distance du sommet de départ jusqu'à x.

On recommence tant qu'il reste des sommets à sélectionner.

Soit G un graphe *connexe* dont les arêtes sont pondérées par des nombres *positifs*.

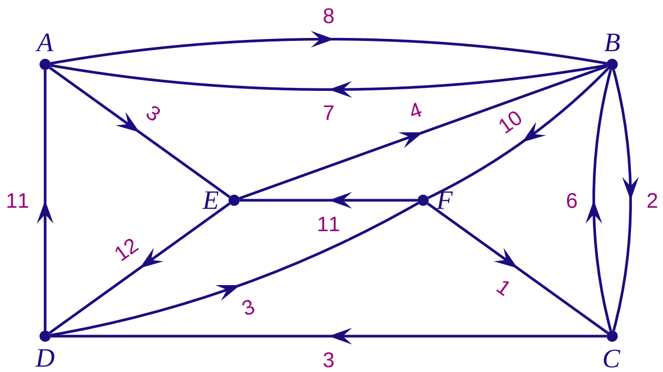
Notations :

- S la liste des sommets du graphe et s le sommet du graphe à partir duquel on veut déterminer les plus courts chemins aux autres sommets.
- $l(x,y)$ le poids de l'arête entre deux sommets x et y
- $\delta_s(x)$ la longueur d'un chemin du sommets s au sommet x
- $V^+(x)$ la liste des successeurs du sommet x
- $p(x)$ le prédécesseur du sommet x
- X liste des sommets restant à traiter.
- E liste des sommets déjà traités.

```
INITIALISATION :
POUR_CHAQUE x ∈ S FAIRE δs(x) = ∞;
Poser δs(s) = 0;
X = S;
E = ∅;
TRAITEMENT :
TANT_QUE X ≠ ∅ FAIRE
    Choisir dans X le sommet x avec δs(x) minimum;
    Retirer x dans X et l'ajouter à E;
    POUR_CHAQUE y ∈ V+(x) ∩ X FAIRE        // on examine tous les successeurs de x qui ne sont pas traités
        SI δs(y) > δs(x) + l(x,y) ALORS
            poser δs(y) = δs(x) + l(x,y);
            p(y) = x ;
        FIN SI
    FIN POUR_CHAQUE
FIN TANT_QUE
```

EXEMPLE

Considérons le graphe suivant :



On souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F.

A	B	C	D	E	F	Sommets sélectionnés	
0	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$	Initialisation ; $\delta(A)=0$ A est sélectionné.
	$8(A)$	∞	∞	$\mathbf{3(A)}$	∞	$E(3)$	B et E sont les successeurs de A qui ne sont pas traités ; $0+8<\infty$ donc $\delta(B)=8$ et $p(B)=A$; $0+3<\infty$ donc $\delta(E)=3$ et $p(E)=A$; $\delta_{min}=3$, Le sommet E est sélectionné.
	$\mathbf{7(E)}$	∞	$15(E)$		∞	$B(7)$	B et D sont les successeurs de E qui ne sont pas traités ; $3+4<8$ donc $\delta(B)=7$ et $p(B)=E$; $3+12<\infty$ donc $\delta(D)=15$ et $p(D)=E$; $\delta_{min}=7$, Le sommet B est sélectionné.
		$\mathbf{9(B)}$	$15(E)$		$17(B)$	$C(9)$	C et F sont les successeurs de B qui ne sont pas traités ; $9+2<\infty$ donc $\delta(C)=9$ et $p(C)=B$; $9+10<\infty$ donc $\delta(F)=10$ et $p(F)=B$; $\delta_{min}=9$, Le sommet C est sélectionné.
			$\mathbf{12(C)}$		$17(B)$	$D(12)$	D est le successeur de C qui n'est pas traité ; $9+3<15$ donc $\delta(D)=12$ et $p(D)=C$; $\delta_{min}=12$, Le sommet D est sélectionné.
					$\mathbf{15(D)}$	$F(15)$	F est le successeur de D qui n'est pas traité ; $12+3<17$ donc $\delta(F)=15$ et $p(F)=D$; Le sommet F est le dernier sommet traité.

- L'algorithme de Dijkstra fournit les longueurs des plus courts chemins du sommet origine aux différents sommets.
- Pour déterminer le plus court chemin du sommet origine à un sommet x, il suffit de remonter la liste des prédécesseurs en partant de x.

Ainsi, le plus court chemin de A à F est un chemin de longueur 15.
Comme $F \longleftarrow D \longleftarrow C \longleftarrow B \longleftarrow E \longleftarrow A$ on obtient que le plus court chemin de A à F est A E B C D F.

EXERCICE 1

Pour chacune des listes suivantes, déterminer s'il existe un graphe simple admettant cette liste pour liste des degrés des sommets. S'il existe un tel graphe, le dessiner, sinon expliquer pourquoi.

1. $(2,3,3,4,4,5)$
2. $(1,1,1,3)$
3. $(1,1,2,4,4)$
4. $(2,3,3,4,5,6,7)$

EXERCICE 2

Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple G si la liste des degrés des sommets est $(2,2,3,3,4)$?

EXERCICE 3

Dans un graphe simple d'ordre n, quel est le nombre maximal d'arêtes ?

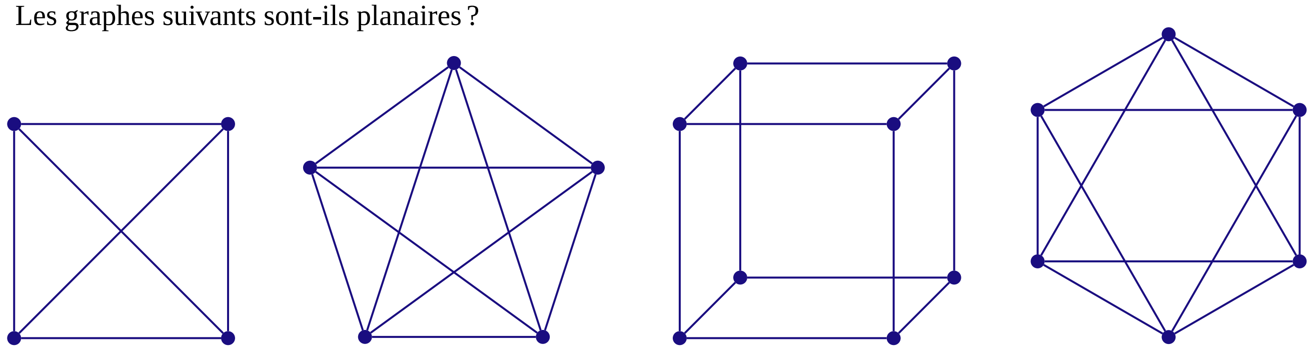
EXERCICE 4

Que penser des deux propositions suivantes ?

1. « Dans une réunion il y a toujours deux personnes qui connaissent le même nombre de personnes présentes à cette réunion » ?
2. « Dans une réunion il y a toujours deux personnes qui saluent le même nombre de personnes présentes à cette réunion » ?

EXERCICE 5

Un graphe est « *planaire* » si on peut le dessiner dans le plan sans que deux arêtes se croisent.
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



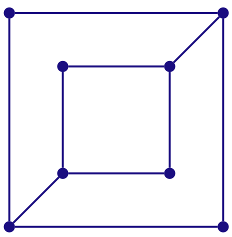
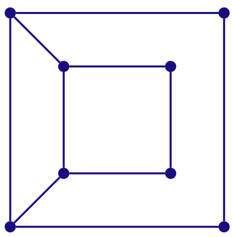
G_1 G_2 G_3 G_4

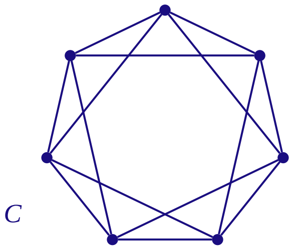
EXERCICE 6

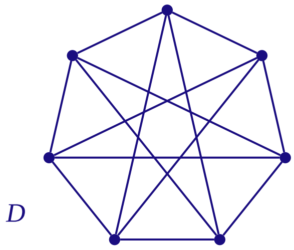
Trouver deux graphes d'ordre 5 qui ne sont pas isomorphes et dont les degrés des sommets sont donnés par la liste $(1,2,2,2,3)$.

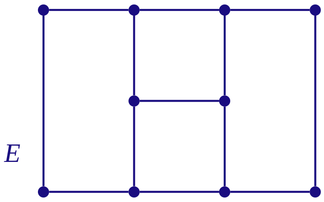
EXERCICE 7

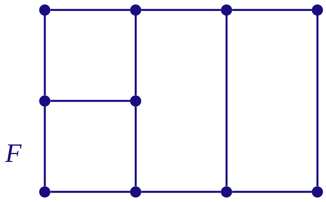
Les graphes simples suivants sont-ils isomorphes ?

1. A  et B 

2. 

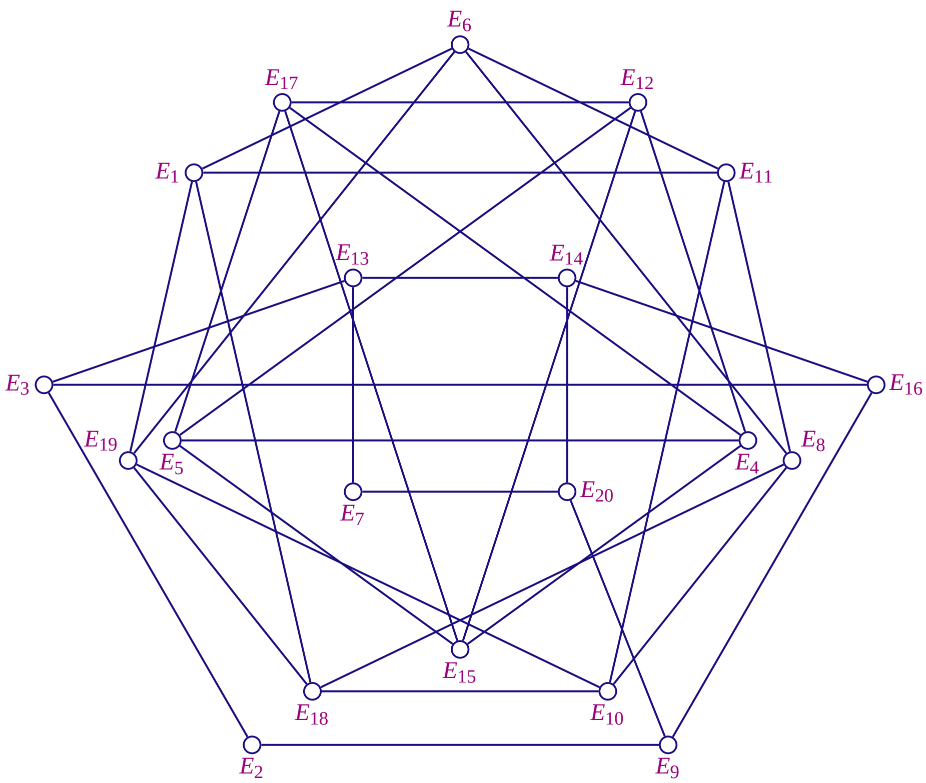
et 

3. 

et 

EXERCICE 8

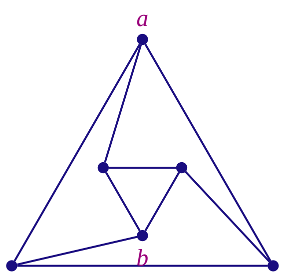
Le calendrier d'un tournoi opposant 20 équipes doit être aménagé.
Les rencontres qui doivent encore être jouées sont représentées par le graphe ci-dessous.
Une arête entre les sommets E_i et E_j signifie que les deux équipes E_i et E_j doivent jouer un match.
Plusieurs matchs peuvent avoir lieu le même jour.
Combien de journées au minimum faut-il pour terminer le tournoi ? Proposer un calendrier des différentes rencontres.



EXERCICE 9

On considère le graphe ci-contre :

1. Combien de chaînes simples de longueur 5 possède-t-il ?
2. Combien de cycles possède-t-il ?
3. Dénombrer toutes les chaînes élémentaires ayant pour extrémités a et b.



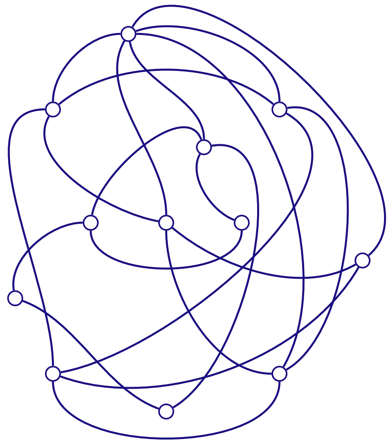
EXERCICE 10

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 0, 1, 2, 3 ou 4.

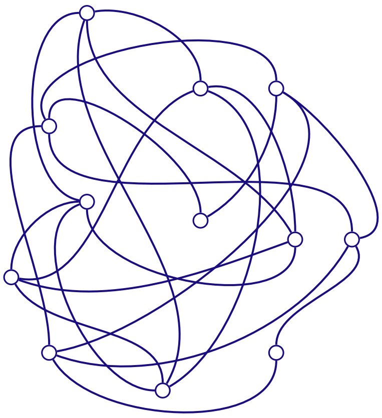
1. a) En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
   b) Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
   c) Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
2. Avec des dominos dont les faces sont numérotées de 0 à n, est-il toujours possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

EXERCICE 11

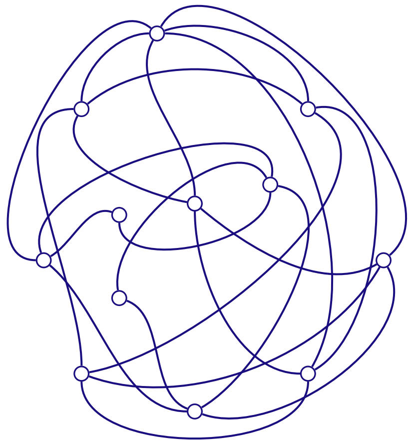
Pour chacun des graphes suivants, existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?



Graphe G



Graphe H

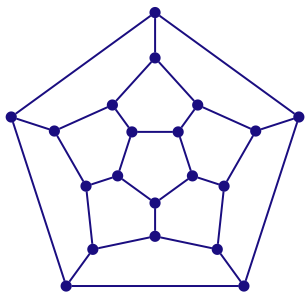


Graphe I

EXERCICE 12

Dans un graphe connexe G, une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe par chaque sommet de G exactement une fois. Si cette chaîne est un cycle on dira que c'est un cycle hamiltonien.
La recherche d'une chaîne hamiltonienne est la modélisation du problème du voyageur de commerce (trouver un chemin incluant chaque ville de sa tournée une et une seule fois)

1. Vérifier que le graphe ci-dessous possède au moins un cycle hamiltonien.



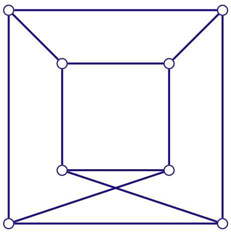
2. Dans chacun des cas suivants, dessiner un graphe G connexe d'ordre au moins 5 tel que :
   a) G possède à la fois un cycle hamiltonien et un cycle eulérien.
   b) G possède un cycle hamiltonien et pas de cycle eulérien.
   c) G possède un cycle eulérien et pas de chaîne hamiltonienne.
   d) G n'admet ni chaîne eulérienne ni chaîne hamiltonienne

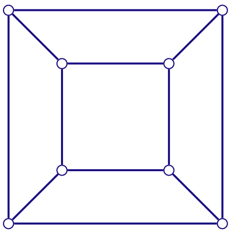
EXERCICE 13

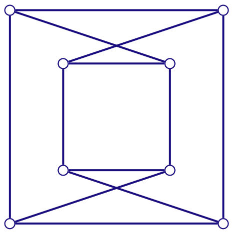
Est-il possible d'avoir un graphe qui possède un cycle eulérien si la liste des degrés des sommets est $(6,6,4,2,2,2,2)$?

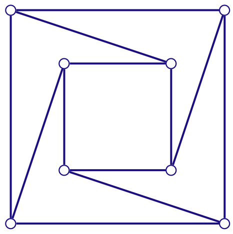
EXERCICE 14

Un graphe G est biparti s'il existe une partition de son ensemble S de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque arête de G a une extrémité dans X et l'autre dans Y.
Parmi les graphes suivants lesquels sont bipartis ?


Graphe G

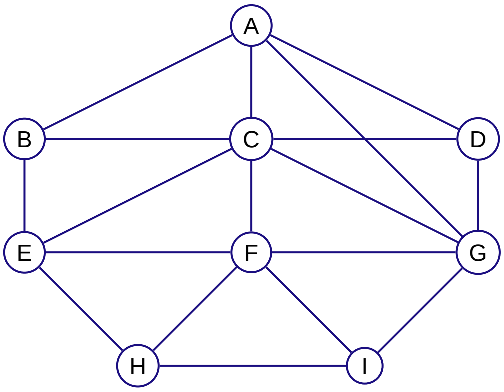

Graphe H


Graphe I


Graphe J

EXERCICE 15

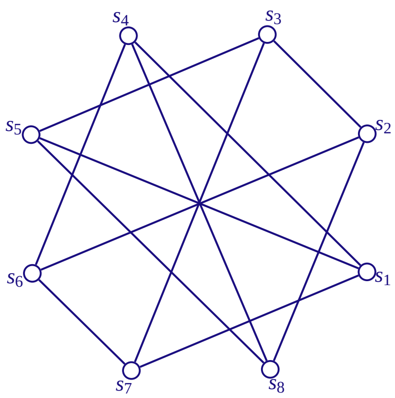
On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous. On note γ son nombre chromatique.



1. Donner un encadrement du nombre chromatique.
2. Donner une coloration de ce graphe.
3. En déduire la valeur du nombre chromatique de $\mathscr{G}$.

EXERCICE 16

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous. On note χ son nombre chromatique.



1. Donner un encadrement du nombre chromatique.
2. En utilisant l'algorithme de Welsh & Powell, donner une coloration de ce graphe.
3. Peut-on en déduire la valeur du nombre chromatique de $\mathscr{G}$?

EXERCICE 17

Un examen comporte outre les matières communes, huit matières optionnelles.

Les options suivies par les 22 groupes d'étudiants sont données dans le tableau suivant (une croix indique que le groupe d'étudiants G_x suit l'option O_y).

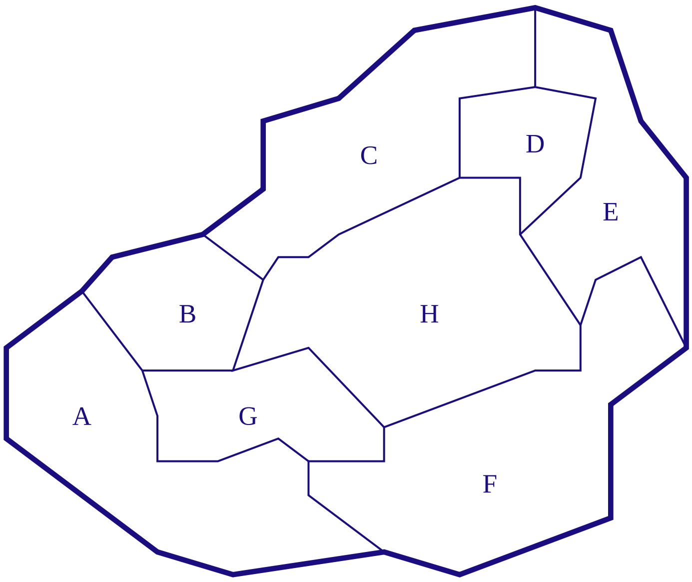
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}	G_{16}	G_{17}	G_{18}	G_{19}	G_{20}	G_{21}	G_{22}
O_1	x	x	x							x						x					x	
O_2				x	x	x	x						x						x			
O_3				x			x	x	x								x			x		x
O_4	x									x	x	x		x								
O_5					x						x		x	x	x							
O_6		x						x							x	x	x	x		x		
O_7						x						x						x	x			
O_8			x						x												x	x

Une épreuve occupe une demi-journée. Comment organiser les épreuves des matières optionnelles de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée miminale ?

EXERCICE 18

1. Comment colorier cette carte de telle manière que deux régions frontalières aient des couleurs différentes.

   Combien de couleurs au minimum faut-il prévoir ?



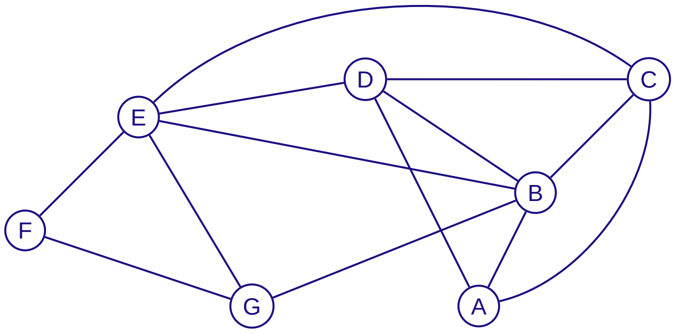
2. On s'intéresse aux frontières séparant ces régions.

   Peut-on visiter toutes ces régions en franchissant une et une seule fois chacune des frontières ? Si oui, proposer un parcours possible.

EXERCICE 19

(*D'après sujet bac Polynésie 2006*)

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathscr{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathscr{G}$?
2. a) Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
   Proposer un coloriage adapté à cette condition.
   b) Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathscr{G}$?
3. a) Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?
   b) Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?
4. a) En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice M associée à $\mathscr{G}$.
   b) On donne :

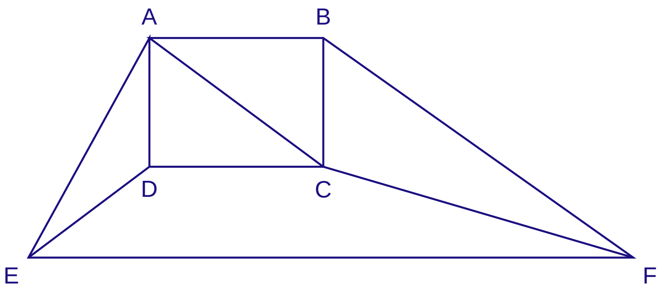
$$M^8 = \begin{pmatrix} 6\,945 & 9\,924 & 8\,764 & 8\,764 & 9\,358 & 3\,766 & 5\,786 \\ 9\,924 & 14\,345 & 12\,636 & 12\,636 & 13\,390 & 5\,486 & 8\,310 \\ 8\,764 & 12\,636 & 11\,178 & 11\,177 & 11\,807 & 4\,829 & 7\,369 \\ 8\,764 & 12\,636 & 11\,177 & 11\,178 & 11\,807 & 4\,829 & 7\,369 \\ 9\,358 & 13\,390 & 11\,807 & 11\,807 & 12\,634 & 5\,095 & 7\,807 \\ 3\,766 & 5\,486 & 4\,829 & 4\,829 & 5\,095 & 2\,116 & 3\,181 \\ 5\,786 & 8\,310 & 7\,369 & 7\,369 & 7\,807 & 3\,181 & 4\,890 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?
5. a) Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
   b) Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

EXERCICE 20 (*D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion Septembre 2007*)

PARTIE I

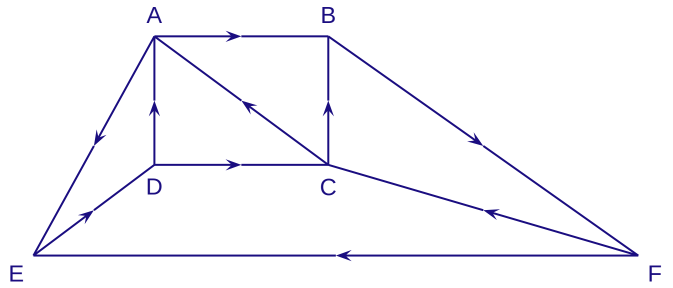
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.

PARTIE II

Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.

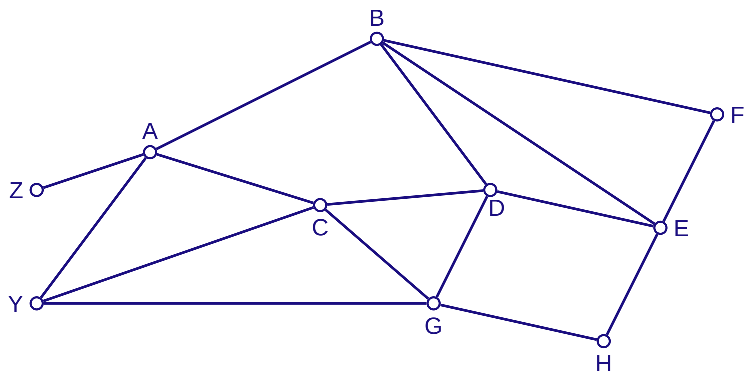


1. Écrire la matrice M associée à ce graphe. (On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
2. a) Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?
   b) Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M ?

EXERCICE 21

(*D'après sujet bac Amérique du Nord 2007*)

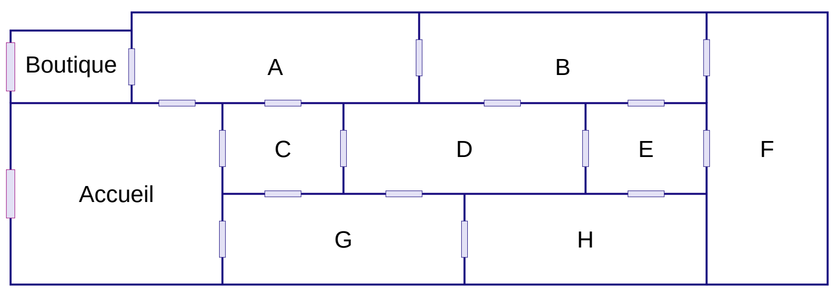
PREMIÈRE PARTIE : Étude d'un graphe



On considère le graphe ci-dessus.

1. a) Ce graphe est-il connexe ?
   b) Déterminer le degré de chacun des sommets.
   On pourra donner le résultat sous forme de tableau.
   c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.
2. a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
   b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

DEUXIÈME PARTIE : Visite d'un musée



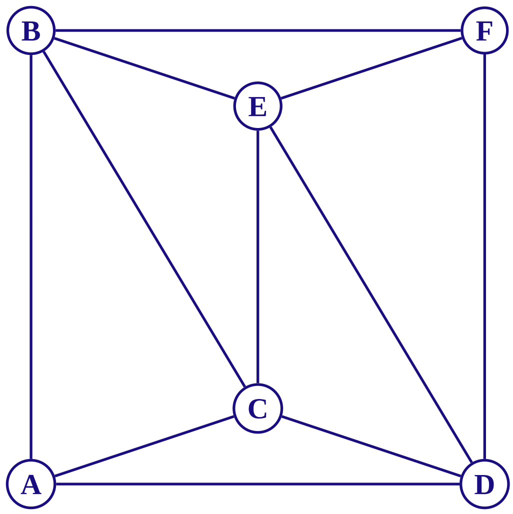
Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
2. a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

   b) Donner un exemple d'un tel circuit.
3. Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que deux salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

EXERCICE 22 (*D'après sujet bac Antilles-Guyanne 2009*)

On considère le graphe $\mathscr{G}$ suivant :



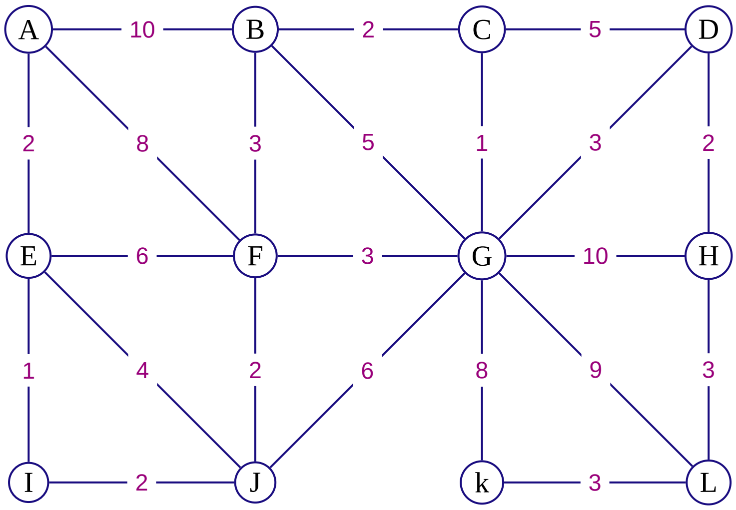
1. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il connexe ? Expliquer la réponse.
2. Le graphe $\mathscr{G}$ admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe $\mathscr{G}$. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe $\mathscr{G}$. Justifier la réponse.
5. Déterminer alors ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.
6. Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

   Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

EXERCICE 23

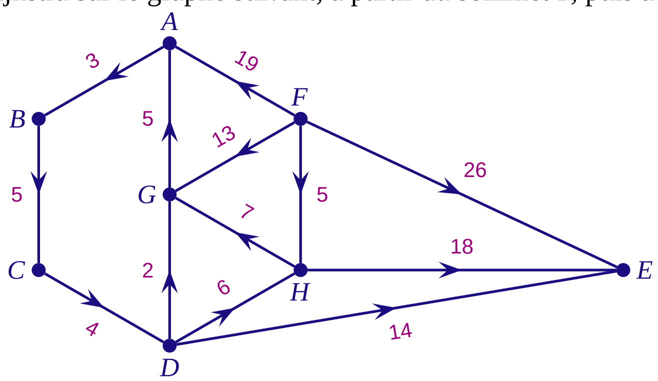
Le graphe ci-dessous indique les différentes liaisons entre plusieurs lieux. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les différents lieux.

En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de A à L.



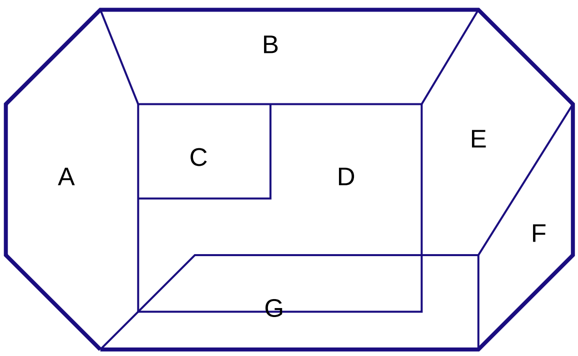
EXERCICE 24

Exécuter l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant, à partir du sommet F, puis à partir du sommet A.



EXERCICE 25

Sur la carte ci-dessous, sont représentés sept pays avec leurs frontières.



Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

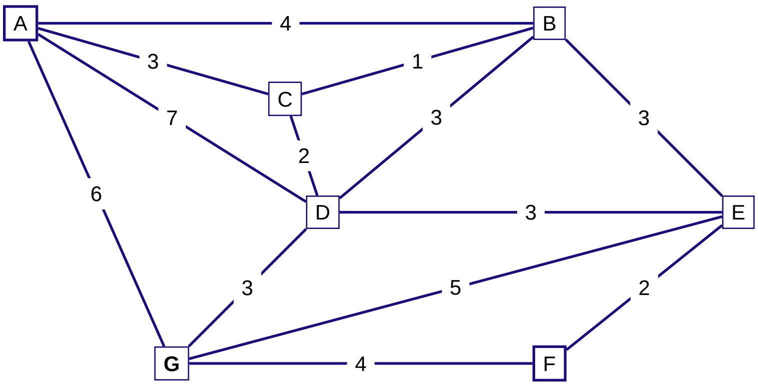
1. On s'intéresse aux frontières séparant ces pays :
   a) Traduire cette carte par un graphe dont les sommets sont les pays et où chaque arête représente une frontière entre deux pays.
   b) On appelle M la matrice associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
   Une des trois matrices R, S ou T est la matrice M^3. Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3.

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 12 & 8 & 9 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 6 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 11 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 7 & 11 & 6 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 11 & 7 & 6 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Est-il possible, dans tous les cas, de se rendre d'un pays à un autre en franchissant exactement trois frontières ?

d) Est-il possible de visiter tous les pays en franchissant une et une seule fois chacune des frontières ?

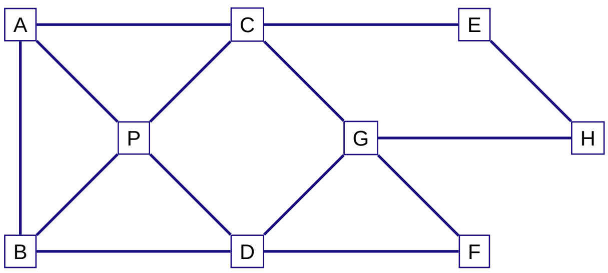
2. Proposer une coloration de la carte (ou du graphe) avec le minimum de couleurs afin que deux pays qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes.
3. Une personne désire se rendre en train d'une ville située dans le pays A à une autre ville du pays F. Le graphe pondéré ci-dessous donne, en heures, les durées moyennes des liaisons ferroviaires existantes entre les différents pays en tenant compte des temps d'attente entre deux correspondances.



En précisant la méthode utilisée, déterminer le trajet le plus court que cette personne devra utiliser pour son voyage. Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 26

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'un quartier. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

1. La municipalité décide de planter des arbres dans chaque zone, de manière à ce que dans deux zones, reliées entre elles par une voie d'accès principale les espèces plantées soient d'essence différente. Pour des raisons d'entretien, il est préférable que le nombre d'essences plantées soit le plus petit possible.

   On note V le nombre de variétés d'arbres qu'il faut utiliser.

a) Donner un encadrement de V.

b) Quel nombre minimal d'essences différentes faudra-t-il planter ?

2. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

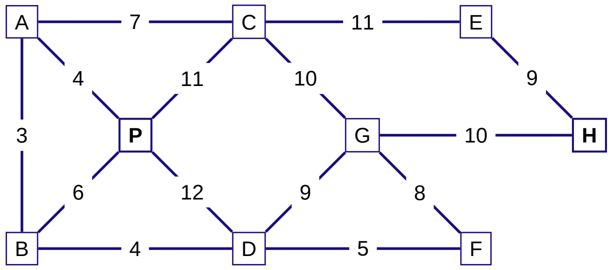
a) Montrer qu'un tel parcours est possible.

b) Un tel parcours est-il possible pour ce candidat en partant de sa permanence électorale située en P ? si oui le donner, sinon proposer un parcours possible en partant d'un autre endroit.

3. Un candidat aux élections municipales se trouve dans sa permanence située en zone P quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone H.

a) Quel est le nombre minimal de voies d'accès principales que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous ?

b) Le graphe pondéré ci-dessous donne, en minutes, les durées moyennes des trajets existants entre les différents lieux :



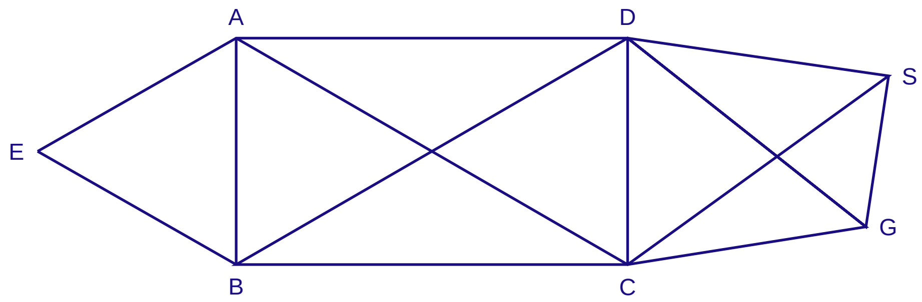
En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 27 (*D'après sujet bac Centres étrangers 2007*)

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

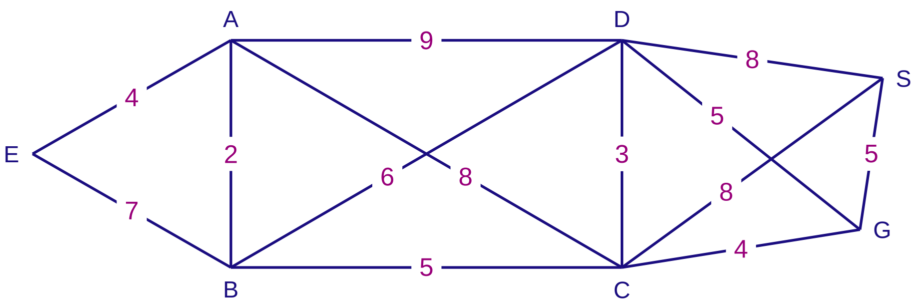
L'objet d'étude est le réseau des égouts d'une ville. Ce réseau est modélisé par le graphe ci-dessous : les sommets représentent les stations et les arêtes, les canalisations.



PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
2. Justifier que le nombre chromatique de ce graphe est compris entre 4 et 6.

PARTIE B



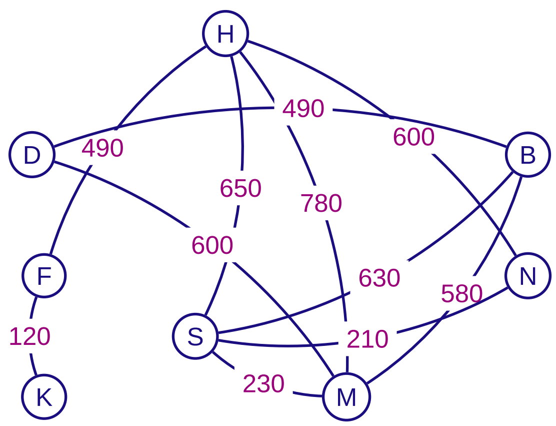
Le graphe pondéré ci-dessus donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts.

1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à la station S. Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.
2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.
   a) Comment peut-il terminer, au plus vite, son trajet jusqu'à S ? Combien de temps le trajet entre E et S prendra-t-il dans ce cas ?
   b) S'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, quel trajet aurait choisi l'ouvrier pour se rendre, au plus vite de E à S ? Combien de temps ce trajet aurait-il pris ?

EXERCICE 28 (*D'après sujet bac Amérique du Sud 2006*)

1. À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.

   Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.

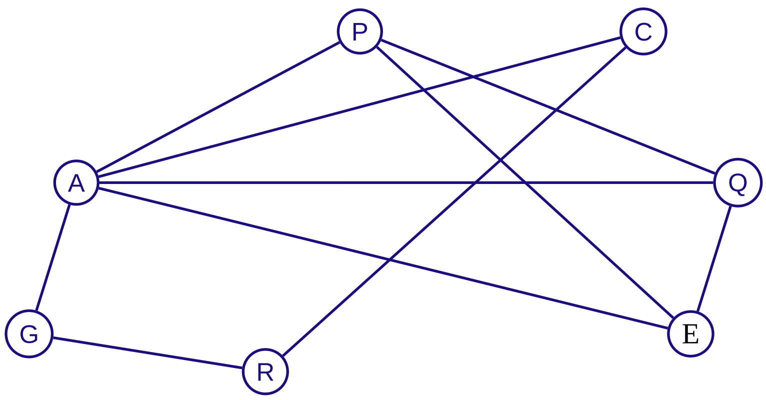


   En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.

2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.

   L'objectif de cette question consiste à rechercher une répartition des supporters afin d'utiliser le minimum d'hôtels.

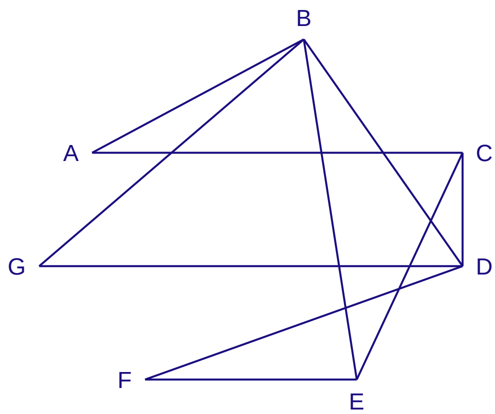
   On donne ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B.



a) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.

b) Proposer une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

EXERCICE 29 (*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2007*)



Sur le graphe ci-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes.

Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?

2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

   On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

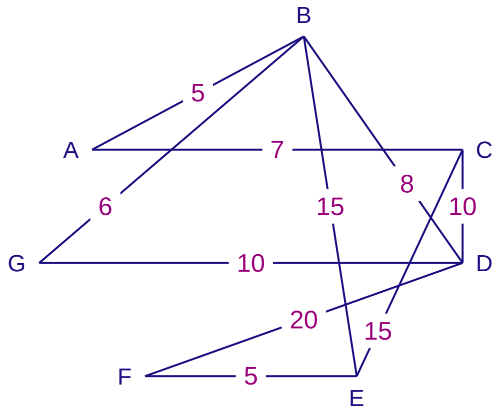
   Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.

   Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

3.

On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :

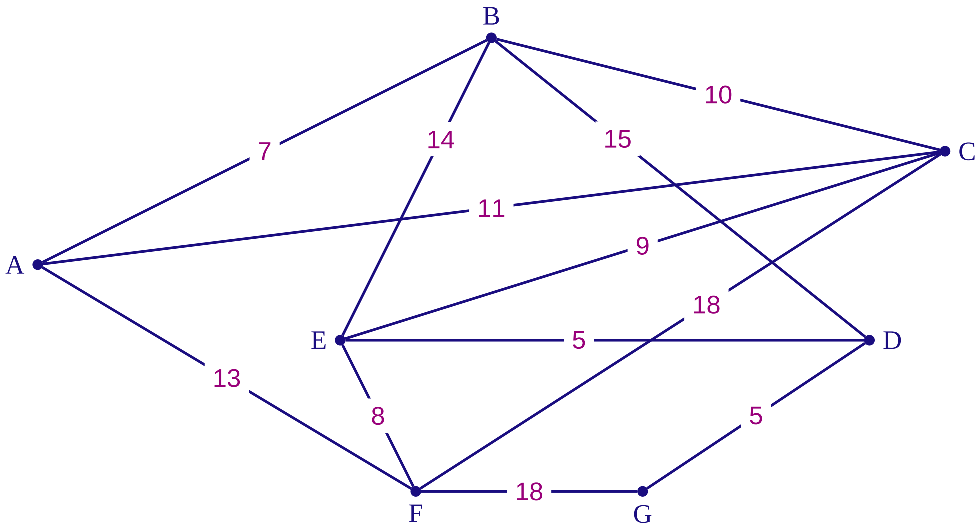
AB : 5 ; AC : 7 ;
BD : 8 ; BE : 15 ;
BG : 6 ;CD : 10 ;
CE : 15 ; DF : 20 ;
DG : 10 ; EF : 5 ;



Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.
En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

EXERCICE 30 (*D'après sujet bac Polynésie 2008*)

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix.
La ville compte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-dessous.



1. Philippe cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.
   a) A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ? Justifier la réponse.
   b) À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. On donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3.
Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant la réponse.

b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station.
Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A.
À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner alors le temps nécessaire pour l'effectuer.

EXERCICE 1

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :
– une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle ;
– une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.
On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :
– 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule ;
– 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.
En 2008, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.
2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n + b_n = 1$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année $2008+n$. L'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2009.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}2$.
3. On pose pour tout entier n, $u_n = a_n - 0{,}4$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0{,}4 \times (1 + 0{,}5^n)$
   c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite (a_n). Donner une interprétation concrète de ce résultat.
   d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401 ?

EXERCICE 2

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.
Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.
Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n-ième mois après l'étude et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b) Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $\begin{pmatrix} 0{,}564 & 0{,}436 \end{pmatrix}$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$. Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - 0{,}6$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0{,}1 \times 0{,}6^n + 0{,}6$.
   c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à 0,595 ?

EXERCICE 3

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.
Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

- 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative ;
- Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;
- 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F, N et R.
2. On note M la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter $M = \begin{pmatrix} \dots & 0{,}28 & 0{,}1 \\ 0{,}32 & \dots & 0{,}1 \\ \dots & \dots & 0{,}7 \end{pmatrix}$.
3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.

   Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n, b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n.

   La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}58 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

   b) Déterminer l'état probabiliste P_3. Interpréter ce résultat.

   c) Soit $P = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}25 \end{pmatrix}$, la matrice ligne de l'état probabiliste stable du système. Déterminer a et b.

   d) En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire ?

EXERCICE 4

(*D'après sujet bac Amérique du Nord 2010*)

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,7. S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,9. Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le n-ième jour.
- b_n la probabilité qu'Alex aille se baigner le n-ième jour.
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour. On a donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).

   b) Soit M la matrice de transition associée à ce graphe. Recopier et compléter $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & \dots \\ \dots & 0{,}7 \end{pmatrix}$
2. Calculer P_3, P_{10} et P_{20}. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. a) Montrer que pour tout entier n non nul, $b_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}7b_n$.

   b) En déduire que : $b_{n+1} = -0{,}2b_n + 0{,}9$.
4. On considère la suite u définie pour tout entier n non nul par $u_n = b_n - 0{,}75$.

   a) Montrer que u est une suite géométrique de raison $-0{,}2$; on précisera son premier terme.

   b) Déterminer la limite de la suite u.

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5. On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner.
Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20e jour de ses vacances ?

EXERCICE 5 *(D'après sujet bac Antilles-Guyane 2010)*

M. et Mme Martin, qui habitent une grand ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'années suivante est de 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2009+n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2009+n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2009+n)$.

PARTIE A

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).
   b) En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.
2. a) Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2009.
   b) On donne les résultats suivants : $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}444 & 0{,}556 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix}$; $M^4 = \begin{pmatrix} 0{,}4332 & 0{,}5668 \\ 0{,}4251 & 0{,}5749 \end{pmatrix}$.
   En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième)*.
3. Soit P la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x+y=1$.
   Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

PARTIE B

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}3$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - \dfrac{3}{7}$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) En déduire l'expression de u_n, puis celle de a_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

EXERCICE 6 *(D'après sujet bac Liban 2010)*

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes.
On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.
La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.
Une étude statistique montre que :
15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante.
On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n-ième semaine et P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
   b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
   a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.
   b) Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \times \left(0{,}75^{n-1}\right)$.
   a) Résoudre l'inéquation $a_n < 0{,}5$.
   b) À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?

EXERCICE 7 (*D'après sujet bac Polynésie 2010*)

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, et d'autre part le logiciel Bestmath, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier et en juillet, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.
Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32 % des informaticiens utilisait le logiciel Aurora, les autres informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.
Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010, ...), le chef du réseau informatique a constaté que 20 % des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.
Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).

Pour tout entier naturel n, on désigne par :
– a_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre n ;
– b_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre n.

1. a) Traduire les données l'énoncé par un graphe probabiliste.
   b) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. a) On note $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer P_0.
   b) On appelle P_1 l'état de la société en juillet 2009. Vérifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}426 & 0{,}574 \end{pmatrix}$.
   c) On appelle P_2 l'état en janvier 2010. Déterminer P_2 (les résultats seront arrondis à 10^{-3}).
3. Dans cette partie on étudie la suite (a_n).
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = 0{,}55a_n + 0{,}25$.
   b) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \dfrac{5}{9} - a_n$.
   Démontrer que la suite (U_n) est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme.
   c) En déduire l'expression de U_n puis de a_n en fonction de n.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable.
   a) Déterminer x et y.
   b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon. Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise ?

EXERCICE 8 (*D'après sujet bac La Réunion 2010*)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Une étude statistique est réalisée chaque trimestre sur une population composée initialement de fumeurs. Certains d'entre eux s'arrêtent de fumer, d'autres qui ont arrêté, redeviennent fumeur.

On estime que :

- si un individu est fumeur, la probabilité qu'il arrête de fumer (qu'il devienne non fumeur) le trimestre suivant est 0,2 ;
- si un individu a arrêté de fumer (il est considéré alors comme non fumeur), la probabilité qu'il redevienne fumeur le trimestre suivant est 0,3.

On notera X l'évènement « l'individu est fumeur » et Y l'évènement « l'individu est non fumeur ».

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition que l'on notera M (aucune justification n'est demandée, on respectera l'ordre alphabétique des sommets).

2. Pour un entier naturel n donné, on note x_n la proportion de fumeurs dans la population et y_n la proportion de non fumeurs au trimestre de rang n. On note $E_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système au trimestre de rang n.

   On étudie une population initiale où tous les individus sont fumeurs. On a donc : $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que la proportion de fumeurs à l'issue de deux trimestres est 0,7.

   b) Déterminer l'état E_4 de la population à l'issue d'une année.

3. La répartition fumeurs/non fumeurs de la population converge vers un état stable : $E = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

   Déterminer cet état.

PARTIE B

Le chiffre d'affaires d'un débitant de tabac sur une période donnée est fonction de deux variables : le nombre de consommateurs, c'est-à-dire de fumeurs, et le prix moyen du paquet de tabac.

On appelle z le chiffre d'affaire en milliers d'euros, x le nombre de consommateurs en milliers et y le prix du paquet de tabac en euros. On admettra que $z = xy$.

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on désigne par S la surface d'équation $z = xy$.

1. Le débitant a pour clients 1000 consommateurs réguliers et le prix moyen du paquet de tabac est de 5 euros.

   a) Quel est le chiffre d'affaires réalisé par le débitant ?

   b) Soit, dans un plan P parallèle au plan de base $x\text{O}y$, la ligne de niveau $z = 5$ de la surface S.

   On a tracé cette ligne de niveau sur la figure 1 donnée en annexe.

   Donner son équation de la forme $y = f(x)$.

   Le nombre de consommateurs passe de 1000 à 600 . Quel devrait être, au centime d'euros près, le nouveau prix du paquet de tabac pour que le chiffre d'affaires du débitant reste égal à 5000 € ?

Ligne de niveau $z = 5$ de la surface S.