1 (4 points) On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où $z_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 1$, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$$

1° a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6

b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
Prouver cette conjecture.

2° Déterminer $z_{2\,016}$ dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3° Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

2 (6 points) On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$. On note A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1° a) Déterminer la forme trigonométrique de a.

b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2° Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3° Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ avec θ un nombre réel.

b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4° Décrire et représenter sur l'annexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

NOM :

Annexe