1 Rappels sur les probabilités de première STMG.

1.1 Expériences aléatoires et vocabulaire de la modélisation probabiliste

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé sont des **expériences aléatoires**, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat.

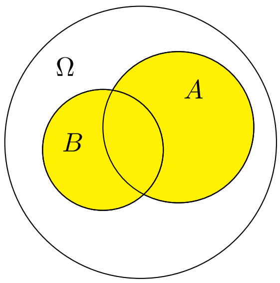
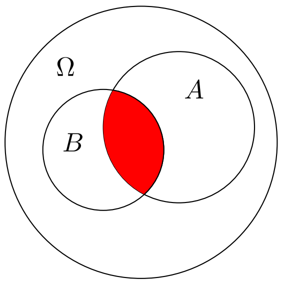
À cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**.
On note généralement $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

- Les éléments de l'univers sont appelés **éventualités ou issues**.
- Les sous-ensembles (collection d'éléments) de l'univers Ω sont appelés **événements**.

Exemple.

On lance un dé à 6 faces et on regarde le chiffre inscrit sur la face apparente une fois le dé stabilisé.
L'univers est $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$
Les éventualités sont $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$ et $\{6\}$
« Obtenir un chiffre pair » correspond au sous ensemble $P = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ de Ω et est donc un événement.
L'événement : « Obtenir un chiffre multiple de 3 » est le sous ensemble $M = \{3\ ;\ 6\}$ de Ω.

- Étant donné un univers Ω, l'événement Ω est **l'événement certain**.
  En reprenant l'exemple précédent, l'événement « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 *» est un événement certain*
- L'ensemble vide $\emptyset$ est **l'événement impossible**.
  En reprenant l'exemple précédent, l'événement « Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 7 *» est un événement impossible*
- L'événement formé des **éventualités communes** à deux événements A et B est noté :
  $\boldsymbol{A \cap B}$ ou encore $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.
  En reprenant l'exemple précédent :
  si $A =$ *« Obtenir un multiple de* 3 *avec le dé »* $= \{3\ ;\ 6\}$
  et $B =$ *« Obtenir un chiffre pair avec le dé »* $= \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ *alors*
  $A \cap B =$ *« Obtenir le chiffre* 6 *»* $= \{6\}$
- L'événement formé des éventualités qui sont **dans** A **ou dans** B **ou dans les deux** est noté : $\boldsymbol{A \cup B}$ ou encore $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$.
  En reprenant l'exemple précédent :
  si $A =$ *« Obtenir un multiple de* 3 *avec le dé »* $= \{3\ ;\ 6\}$
  et $B =$ *« Obtenir un chiffre pair avec le dé »* $= \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ *alors :*
  $A \cup B =$ *« Obtenir les chiffres* 2,3,4 *ou* 6 *»* $= \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\}$

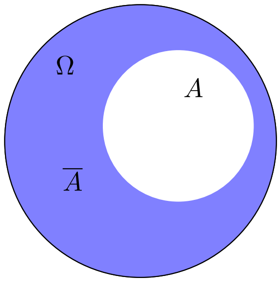
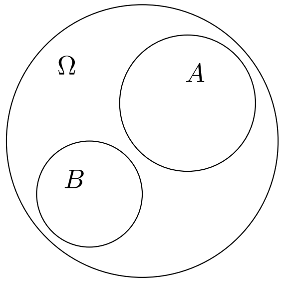
Réunion de A et B : $A \cup B$	**Intersection de A et B :** $A \cap B$
	

- Soit un univers Ω et un événement A, l'ensemble des éventualités contenues dans Ω et **qui ne sont pas dans A** constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$

  En reprenant l'exemple précédent :
  si $B =$ *« Obtenir un chiffre pair avec le dé »* $= \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ *, alors :*
  et $\overline{B} =$ *« Obtenir un chiffre impair avec le dé »* $= \{1\ ;\ 3\ ;\ 5\}$

- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

  En reprenant l'exemple précédent, les événements :
  $A =$ *« Obtenir un chiffre impair avec le dé » et* $B =$ *« Obtenir un chiffre pair avec le dé » sont incompatibles.*

Complémentaire de A : $\overline{A}$	**A et B sont disjoints :** $A \cap B = \emptyset$
	

1.2 Probabilités sur un ensemble fini

Définition 1

Loi de probabilité
On considère un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1\ ;\ \omega_2\ ;\ ...\ ;\ \omega_n\}$
On définit une loi de probabilité p sur Ω en associant à chaque éventualité ω_i un nombre réel $p(\omega_i) = p_i$ de sorte à ce que :

- pour tout $i \in \{\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\ \} : 0 \leqslant p_i \leqslant 1$
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

On dit que p_i est la probabilité de l'éventualité ω_i.

Définition 2

Probabilité d'un événement
Soit p une loi de probabilité sur un univers Ω.
Pour tout événement A, on appelle probabilité de A que l'on note $p(A)$ la somme des probabilités des éventualités composants A.

- Si $A = \{a_1\ ;\ a_2\ ;\ ...\ ;\ a_k\}$ on a : $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_k)$
- On pose d'autre part $p(\emptyset) = 0$
- $p(\Omega) = 1$ puisque par définition d'une loi de probabilité, la somme des probabilités des éventualités composants l'univers est égale à 1.

Propriété 1

Propriétés des mesures de probabilités

Parties de Ω	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A est un événement quelconque	$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
$\emptyset$	Événement impossible	$p(\emptyset) = 0$
Ω	Événement certain	$p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement contraire de A	$\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$
A, B	A et B sont deux événements quelconques	$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

1 3 Situation d'équiprobabilité

Lorsque les éventualités ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables ou que la loi de probabilité est uniforme.

On notera dans ce qui suit Card (Ω) pour désigner le nombre le nombre d'éléments de l'ensemble Ω.

Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$, la probabilité de chaque éventualité est $p(\omega_i) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$

Propriété 2

Probabilité d'un événement dans la situation d'équiprobabilité des éventualités

Dans le cas d'équiprobabilité des éventualités, la probabilité d'un événement A est, le nombre d'éléments de A divisé par le nombre d'éléments de Ω, c'est-à-dire :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable pour la réalisation de} A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque. Les expressions suivantes « dé équilibré, parfait, non truqué, non pipé », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables au toucher » ... indiquent que, pour les expériences réalisées on est en situation d'équiprobabilité des éventualités.

2 Probabilités conditionnelles et indépendance

Définition 3

Probabilité de B sachant A

A et B avec A de probabilité non nulle.

On définit la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé par le nombre noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

$\boldsymbol{p_A(B)}$ est la probabilité de réaliser $\boldsymbol{B}$ lorsque l'univers $\boldsymbol{\Omega}$ est réduit à $\boldsymbol{A}$.

Remarques.

- $p_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A »
- On a donc par produit en croix et quitte à échanger les rôles joués par A et B :
  Si A et B sont de probabilités non nulles $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$

Définition 4

Indépendance de deux événements
On dit que les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$

Autrement dit : Deux événements sont indépendants si l'apport d'information de la réalisation de l'un ne change rien au pronostic probabiliste de réalisation de l'autre.

Propriété 3

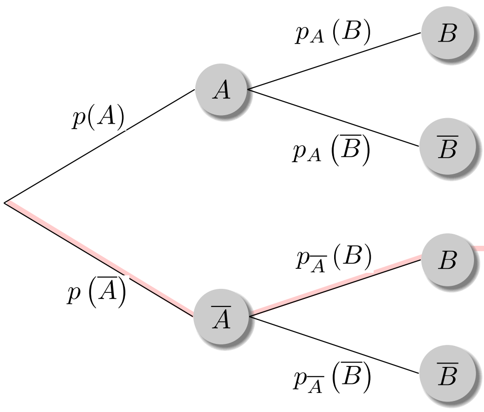
Test d'indépendance
A et B sont indépendants si et seulement si $\quad p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Remarque.
Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles** :

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

3 Arbre de probabilités et principe de lecture

Un arbre pondéré est un procédé graphique commode permettant de résumer une expérience probabiliste pour laquelle la réalisation de certains événements est conditionnée par la réalisation d'autres événements.



$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

$p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{B}\right)$

$p\left(\overline{A} \cap B\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B)$

$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$

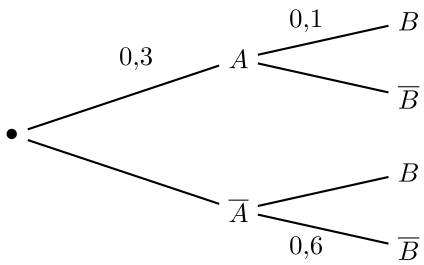
Cet arbre peut être prolongé ou ramifié si nécessaire.
Les règles sont alors les suivantes :

- La réalisation des événements à droite de l'arbre est conditionnée par la réalisation de ceux qui sont à leur gauche.
- La probabilité de réalisation d'une branche de l'arbre est égale au produit des probabilités rencontrées en décrivant la branche.
- La somme des probabilités au niveau d'un nœud de ramification est égale à 1
  $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) \qquad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$; etc...
- La probabilité de réalisation d'une réunion de branches est égale à la somme des probabilités de réalisation de chaque branche.
  Par exemple : $P(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B)$

4 Deux exemples fondamentaux

4 1 Lecture dans un arbre pondéré

Dans le contexte de l'arbre ci-contre :



- $p_A(B) = 0{,}1 \qquad p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}6$
- $p\left(A \underset{\text{" et "}}{\cap} B\right) = p(A) \times p_A(B)$
  $= 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$

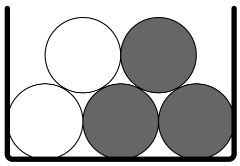
(La probabilité de réalisation de la branche contenant $\overline{A}$ et B est égale au produit des probabilités rencontrées en la parcourant)

- $p(B) =$ Probabilité de réalisation de la réunion des branches ramenant à B
  $=$ Somme des probabilités de réalisation de chaque branche ramenant à B
  $= p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}31$
- $p_B(A)$ ne peut être lu directement dans l'arbre car dans celui-ci, c'est l'événement A qui conditionne la réalisation de B.

  On utilise donc la définition : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}31} \simeq 0{,}09$.

4 2 Une modélisation

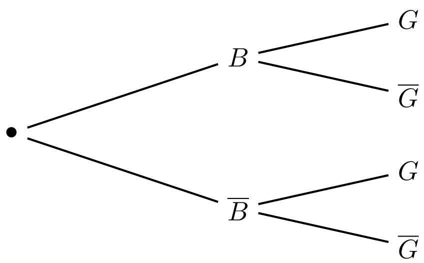
On joue à un jeu de hasard qui consiste tirer au hasard une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires. On lance ensuite un dé bien équilibré.



Si la boule tirée est blanche, la partie est gagnée si le dé laisse apparaître sur sa partie visible un nombre pair, si la boule tirée est noire la partie est gagnée si le dé laisse apparaître sur sa partie visible un 6.

Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?
On note B l'événement « La boule tirée est blanche » et G l'événement « la partie est gagnée »

C'est le résultat du tirage dans l'urne qui conditionne la victoire en fonction des résultats du dé, d'où la modélisation par arbre pondéré :



$p(G) = p(B \cap G) + p\left(\overline{B} \cap G\right) = p(B) \times p_B(G) + p\left(\overline{B}\right) \times p_{\overline{B}}(G) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{10}$
Il y a donc 3 chances sur 10 de gagner.

1 Le cuisinier d'une colonie de vacances a confectionné des beignets pour le goûter :

- 30% des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes.
- 35% des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45% des beignets aux pommes.

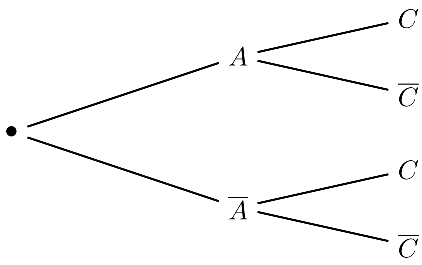
On choisit un beignet au hasard. On admet que chaque beignet a la même probabilité d'être choisi.
On définit les événements suivants :

- A : « le beignet choisi est à l'ananas ».
- C : « le beignet choisi est aromatisé à la cannelle ».

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A et $\overline{C}$ l'événement contraire de C.
On demande les valeurs exactes des probabilités, qui seront données sous forme décimale.

1. Donner, à partir des informations de l'énoncé, la probabilité $p_A(C)$ de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.

2. Reproduire et compléter sur la copie l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. **a.** Définir par une phrase l'événement $A \cap C$.

b. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap C$.

4. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,42.

5. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

6. Calculer la probabilité que le beignet soit à l'ananas, sachant qu'il est aromatisé à la cannelle.

2 *Vers la loi binomiale . . .*

Dans un club de vacances, on a constaté que 30% des estivants pratiquaient le golf et, parmi eux, 40% pratiquent aussi le tennis.55% des estivants pratiquent le tennis.

1. On croise au hasard un vacancier de ce club. On note : G : l'événement « le vacancier pratique le golf » ; T : l'événement « le vacancier pratique le tennis ».

a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(G)$, $p(T)$ et $p_G(T)$

b. En déduire $p(G \cap T)$ puis $p(G \cup T)$

c. On rencontre un estivant pratiquant le tennis, déterminer la probabilité qu'il pratique le golf.

2. Trois estivants se présentent successivement à l'accueil du centre de vacances.
On admet que leurs choix de pratiques sportives sont indépendants les uns des autres.

3. **a.** Déterminer la probabilité que les deux premiers estivants pratiquent le golf.

b. Déterminer la probabilité que les trois estivants pratiquent le golf.

c. Déterminer la probabilité qu'au moins un des trois estivants ne pratique pas le golf.